Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/**2020**
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. *Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.*

a) Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).

c) Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

Bloque 2

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & si\ x \leq c \\ x^2-4x & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 2$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

2. *Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. *El 10 % de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %.*

a) ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial? (0.75 ptos)

b) Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso? (0.75 ptos)

4. *El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha. (1 pto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x - t & si\ x \leq 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.75 ptos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.75 ptos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. *En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$, $1 \leq x \leq 5$, siendo $x = 1$ el lunes y $x = 5$ el viernes.*

a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son? (0.75 ptos)

b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes? (0.75 ptos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. *La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de 1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50 % de votos más que C.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A-B)^2$. (0.75 ptos)

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A-B)^2$? (0.25 ptos)

c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$? (0.5 ptos)

Bloque 2

5. *En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.*

a) *Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio? (0.75 ptos)*

b) *Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)*

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro. (1 pto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

S1B1E1.- **Solución**:

Llamaremos R , M y S a los precios en euros de cada modelo de teléfono.

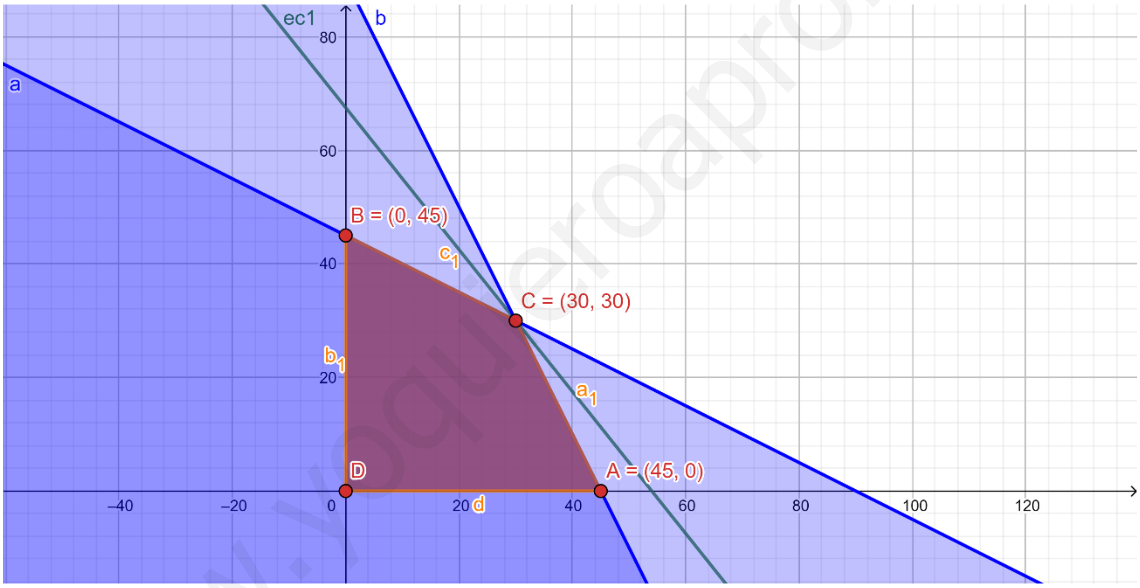
$$a)\left\{\begin{array}{c} S = R + M \\ 50M = 30S \\ 5R + 5M + 10S = 7500 \end{array}\right. \Rightarrow b)\left\{\begin{array}{c} De\ la\ 2^{a}, M = \frac{3}{5}S \\ Sust.en\ 1^{a},\ \ S = R + \frac{3}{5}S \Rightarrow R = \frac{2}{5}S \Rightarrow \\ 5.\frac{2}{5}S + 5.\frac{3}{5}S + 10S = 7500 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S = 500\ € \\ M = 300\ € \\ R = 200\ € \end{array}\right.$$

S1B1E2.- **Solución**:

Llamaremos A al número de tartas de tipo A y llamaremos B al número de tartas de tipo B que buscamos.

a) La función objetivo o ganancia será G(A,B)=5A+4B

$$b)\left\{\begin{array}{c} 100A + 200B \leq 9000 \\ 200A + 100B \leq 9000 \\ A \geq 0, B \geq 0 \end{array}\right.$$



c) Ganancia máxima G(30,30)=150+120=270 euros.

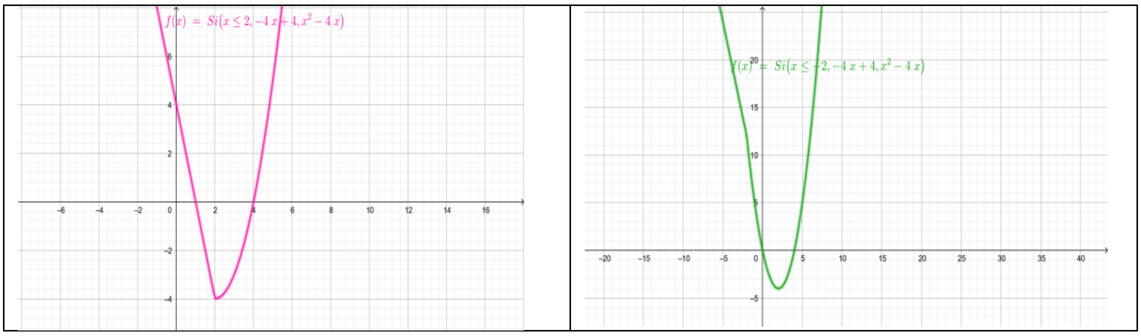
S1B2E1.- **Solución**:

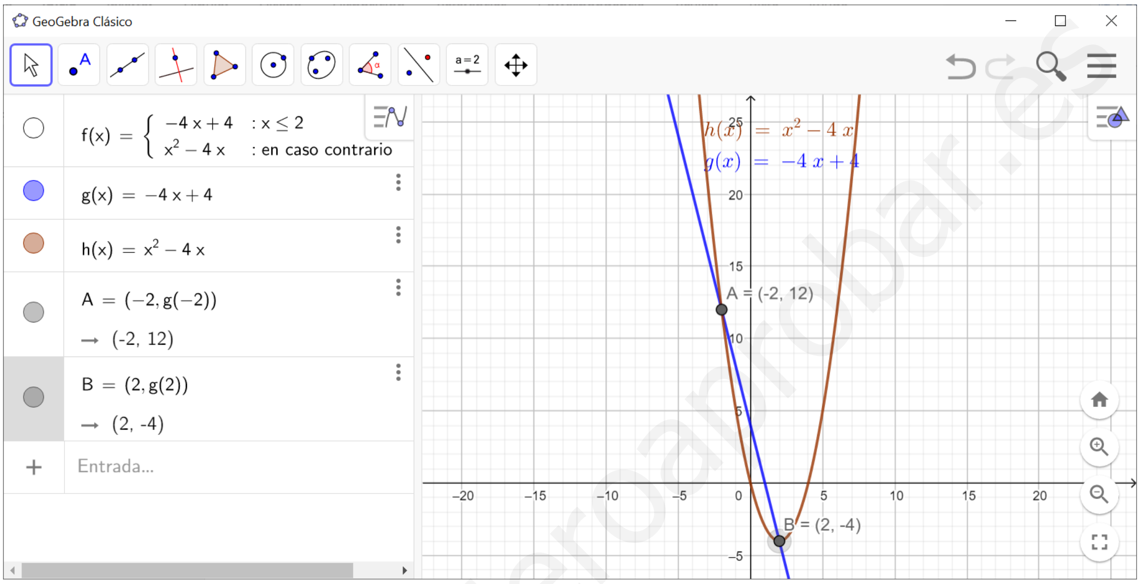
$$f(x) = \left\{\begin{array}{l} -4x + 4\ si\ x \leq c \\ x^2 - 4x\ si\ x > c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} Para\ continua\ en\ c \\ f(c) = -4c + 4 = \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-} -4x + 4 = -\ 4c + 4 \\ \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} x^2 - 4x = c^2 - 4c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -4c + 4 = c^2 - 4c \\ c^2 = 4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -2 \\ c = 2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Luego hay dos valores de c para los que f resulta continua: 2 y -2.

En ambos casos se trata de un trozo de recta y un trozo de parábola que enlazan de forma continua como puede verse en las gráficas:



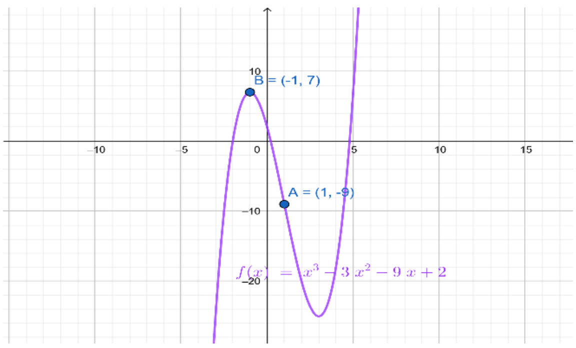


S1B2E2.-**Solución**:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ P.I.(1,-9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \\ f(1) = 1 + a + b + c = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Máx\ en\ x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 = 3 - 2a + b \\ P.I.(1,-9) \Rightarrow f''(1) = 0 = 6 + 2a \\ Luego\ a = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ -2a + b = -3 \\ a + b + c = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \\ c = 2 \end{cases}$$



S2B1E3.- **Solución**:

Llamaremos S al suceso "Ser adulto con sobrepeso", H al suceso "Ser adulto con hipertensión arterial", NS será el suceso contrario de S.

$$Sabemos\ que\ P(S) = 10\%\ , \qquad P\left({}^{H}/_{S}\right) = 2.P\left({}^{H}/_{NS}\right), \qquad P\left({}^{H}/_{NS}\right) = 14'8\%$$

$$a)\ P(S \cap H) = P(S).P\left({}^{H}/_{S}\right) = P(S).2.P\left({}^{H}/_{NS}\right) = 10\% * 2 * 14'8\% = 2'96\%$$

$$P(H) = P(H \cap S) + P(H \cap NS) = P(S).P\left({}^{H}/_{S}\right) + P(NS).P\left({}^{H}/_{NS}\right)$$

$$P(NS) = 1 - P(S) = 90\%$$

$$b)\ \begin{cases} P(H) = 2'96\% + 90\% * 14'8\% = 16'28\% \\ P\left({}^{S}/_{H}\right) = \dfrac{P(S \cap H)}{P(H)} = \dfrac{2'96}{16'28} = 0.1818 = 18'18\% \end{cases}$$

S2B1E4.- **Solución**:

$$Se\ trata\ de\ una\ N(\mu, 30), n = 50, \bar{x} = 220\ minutos$$

$$La\ fórmula\ para\ calcular\ el\ intervalo\ de\ confianza\ es: \mu \in \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$a)\ 1 - \alpha = 95\% \Rightarrow \alpha = 0.05\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9750 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96\ (ver\ tabla)$$

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(220 - 1.96\frac{30}{\sqrt{50}}, 220 + 1.96\frac{30}{\sqrt{50}}\right) = (221.68\ , 228.32)$$

b) Podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza haciendo un estudio de más de 50 personas, pues entonces aumentaría el denominador en la fórmula que nos da el intervalo y por tanto disminuiría el radio y en consecuencia la amplitud.

c) Para ver si 230 pertenece al intervalo de confianza al 90% podemos calcular el intervalo de confianza (de nuevo), pero si lo hacemos nos encontraremos con que la tabla proporcionada no es lo bastante amplia para contener los datos buscados.

$$Pero\ si\ observamos\ más\ el\ motivo\ es\ que\ z_{\frac{\alpha}{2}} < 1.80$$

Lo que nos lleva a observar que el intervalo buscado sería de menor radio que el obtenido anteriormente, y si al anterior no pertenece 230, menos va a pertenecer al que queremos calcular. Luego la contestación al apartado c) es NO.

S2B2E3.- **Solución**:

$$f(x) = \begin{cases} x - t\ si\ x \leq 0 \\ (x-t)^2 - 5(x-t) + 4\ si\ x > 0 \end{cases}$$

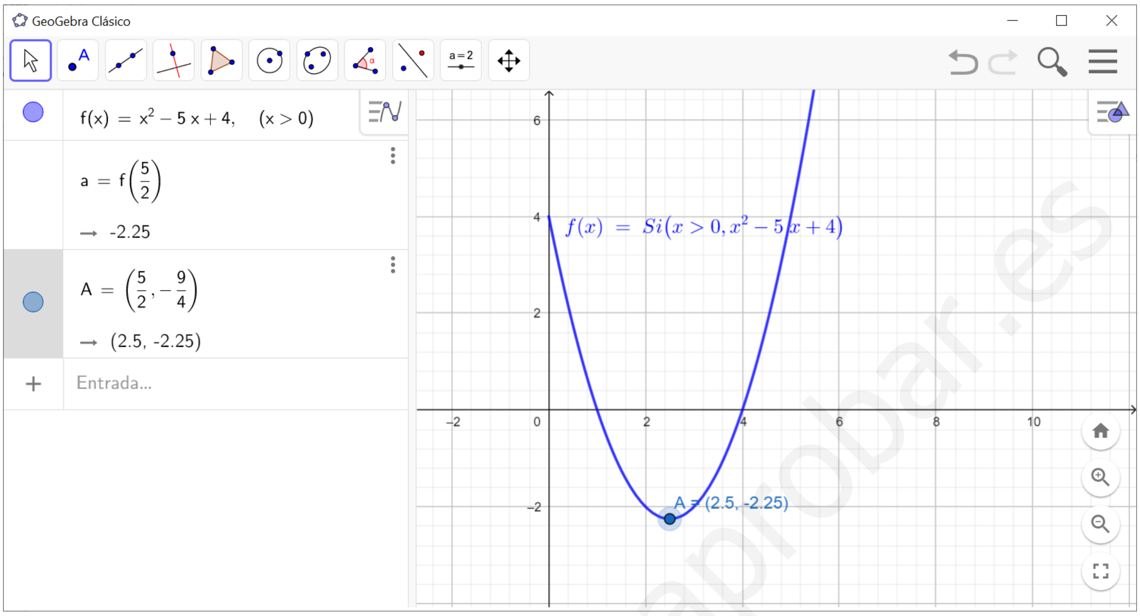
$$\Rightarrow \begin{cases} Para\ continua\ en\ x = 0 \\ f(0) = 0 - t = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x - t = -t \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-t)^2 - 5(x-t) + 4 = t^2 - 5t + 4 \end{cases} \Rightarrow -t$$

$$= t^2 - 5t + 4 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{1} = 2$$

$$Si\ t = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x\ si\ x \leq 0 \\ (x)^2 - 5(x) + 4\ si\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) =$$

$$= \begin{cases} 1\ si\ x < 0 \\ 2x - 5\ si\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0\ si\ x = \dfrac{5}{2} \\ f''(x) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow Mínimo\ en\ (\frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$$

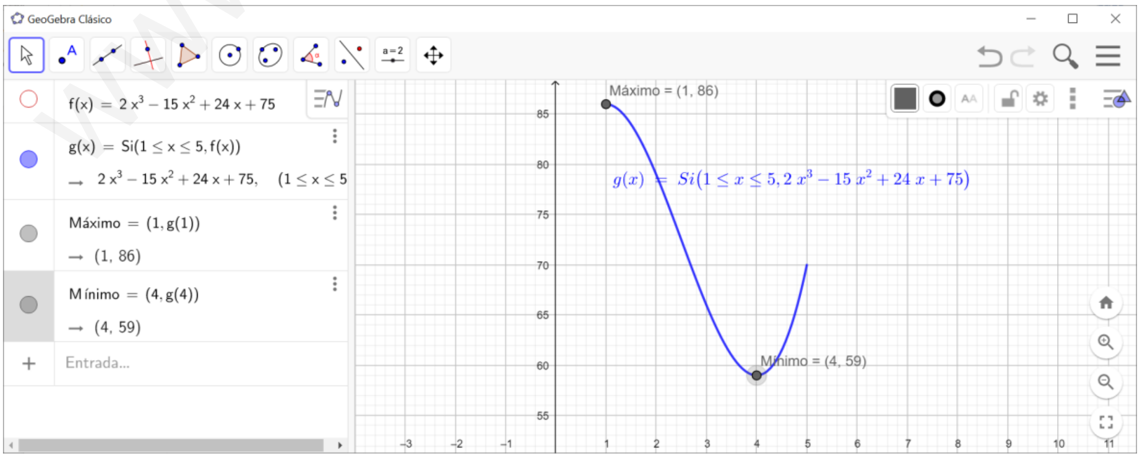


$$c)\ En\ (0, \infty)\ es\ decreciente\ de\ 0\ a\ \frac{5}{2}\ y\ creciente\ de\ \frac{5}{2}\ hasta + \infty.$$

S2B2E4.- **Solución**:

$$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 \\ f''(x) = 12x - 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0,\ \ x^2 - 5x + 4 = 0, \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} f''(1) = -18 < 0 \\ f''(4) = 18 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Máximo\ (1, 86) \\ Mínimo\ (4,59) \end{cases} \end{cases}$$

a) El jueves se alcanzó el mínimo, 59 clientes.
b) El lunes se alcanzó el máximo, 86 clientes.



S3B1E5.- **Solución**:

Llamaremos A al número de votos de la película A, B al número de votos de la película B y C al número de votos de C.

$$a)\begin{cases} A+B+C=1200 \\ A=2(B+C) \\ B=\dfrac{50C}{100}+C \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} A+B+C=1200 \\ A=2(B+C) \\ B=\dfrac{50C}{100}+C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B*C=1200 \\ A-2B-2C=0 \\ 100B=150C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} De\ las\ dos\ primeras \\ 3A=2400 \\ La\ tercera\ 2B=3C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=800 \\ 800-3C-2C=0 \\ C=\dfrac{800}{5}=160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=800 \\ B=240 \\ C=160 \end{cases}$$

S3B1E6.- **Solución**:

$$a)\begin{cases} A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A-B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ (A-B)^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$b)\ (A-B)^2=\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow |(A-B)^2|=225\neq 0 \Rightarrow \exists((A-B)^2)^{-1}$$

$$((A-B)^2)^{-1}=\frac{1}{225}\begin{pmatrix} 25 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$c)\ (A-B)^2=(A-B).(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

$$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2 cuando\ AB=BA$$

Es decir cuando A y B conmuten.

S3B2E5.- **Solución**:

Llamaremos D al suceso “Ser deportista aficionado” y NT al suceso “No superar el test”

$$Sabemos\ que \begin{cases} P(D)=5\% \Rightarrow P(ND)=95\% \\ P\left(^{NT}/_{D}\right)=0.5\%\ , P\left(^{NT}/_{ND}\right)=15\% \end{cases}$$

$$a)\ P(NT)=P(D)*P\left(^{NT}/_{D}\right)+P(ND)*P\left(^{NT}/_{ND}\right)=5\%*0.5\%+95\%*15\%=14\%$$

$$b)\ P\left(^{D}/_{NT}\right)=\frac{P(D\cap NT)}{P(NT)}=\frac{5\%*0.5\%}{14\%}=0.18\%$$

S3B2E6.- **Solución**:

$$Sabemos\ que\ n = 10\ ,\bar{x} = \frac{60 + 80 + \cdots + 90}{10} = 84\ y\ que\ se\ trata\ de\ una\ N(\mu, 10)$$

$$a)\ 1 - \alpha = 97\% \Rightarrow \alpha = 0.03\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9850 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17\ (ver\ tabla)$$

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(84 - 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}, 84 + 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (77.14\ , 90.86)$$

$$85 \in (77.14\ , 90.86)$$

b)Si aumentamos la muestra, n mayor, el intervalo decrece porque n figura en un denominador y eso hace que el radio del intervalo sea más pequeño.

$$c)\ 1 - \alpha = 98.5\% \Rightarrow \alpha = 0.015\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0075 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9925 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} > 2.19\ (ver\ que\ no\ alcanza\ la\ tabla)$$

Por tanto nos saldría un intervalo mayor y claro que 85 pertenecería a ese intervalo.