Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2-4 & si\ x \leq -2 \\ t & si\ -2 < x < 2 \\ (x-4)^2-4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -2. (0.5 ptos)

b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

2. *La función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ *tiene un punto de inflexión en* $(1, 10)$ *y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros* a, b *y c. (1.5 ptos)*

Bloque 2

1. *Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función* $f(x, y) = 6x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x + y \geq 2; x - y \leq 2; y \leq 1; x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. *En un instituto el 15 % de los alumnos ven la tele todos los días, el 25 % juegan todos los días a la consola y el 26 % ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.*

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

4. *Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas de duración de la batería" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ *del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \leq -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x=-1? (0.75 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. *Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.*

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. *Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = A \cdot C - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. (0.75 ptos)

Bloque 2

5. *En una ciudad el 1 % de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70 % tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5 % tiene problemas financieros.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

6. *El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

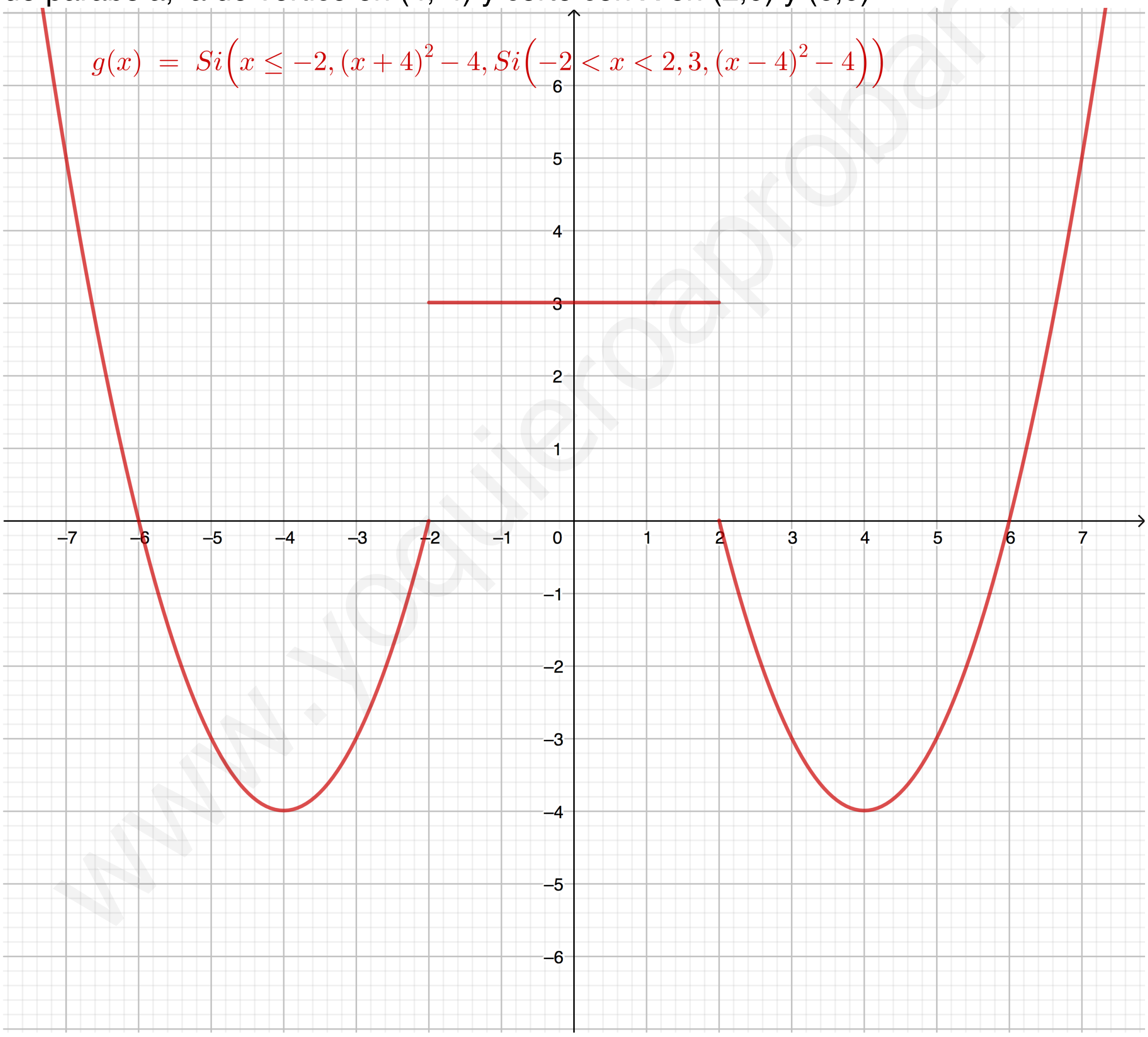
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

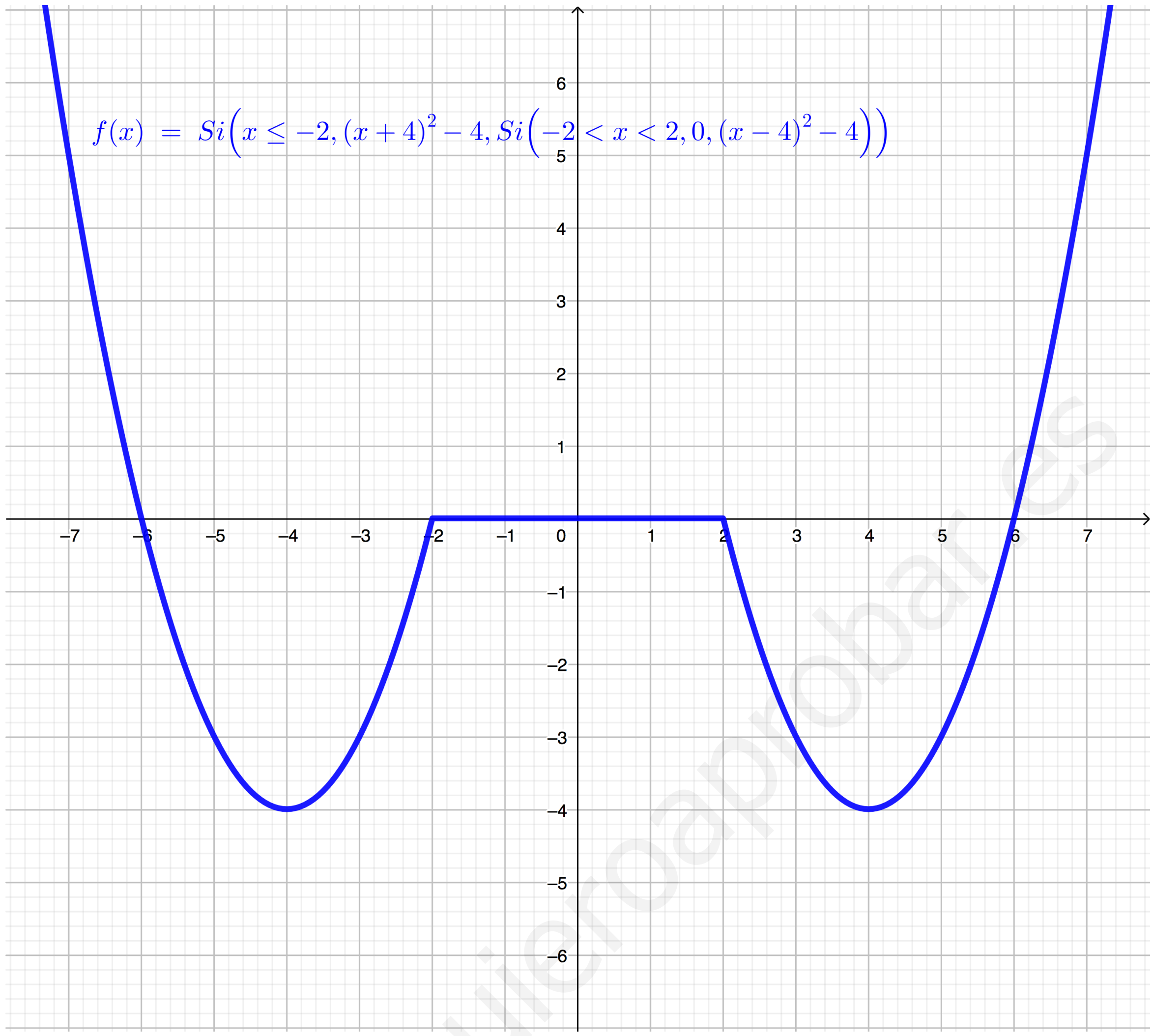
Sección 1 B1e1. Solución:

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-4 \; si \; x\le 2\\ t \qquad si \quad -2<x<2\\ (x-4)^2-4 \; si \; x\ge 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-2)=(-2+4)^2-4=0\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(x+4)^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0\\ para \; f \; cont \; en \; x=-2\end{cases}\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=t\end{cases}$$

$$Si \; t=3 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-4 \; si \; x\le 2\\ 3 \qquad si \quad -2<x<2\\ (x-4)^2-4 \; si \; x\ge 2\end{cases}$$

Se trata de una función a trozos: el primero es una parábola de vértice (-4,-4) y corte con el eje X en (-6,0) y (-2,0) el segundo es un segmento y=3 y el tercero otra rama de parábola, la de vértice en (4,-4) y corte con X en (2,0) y (6,0)

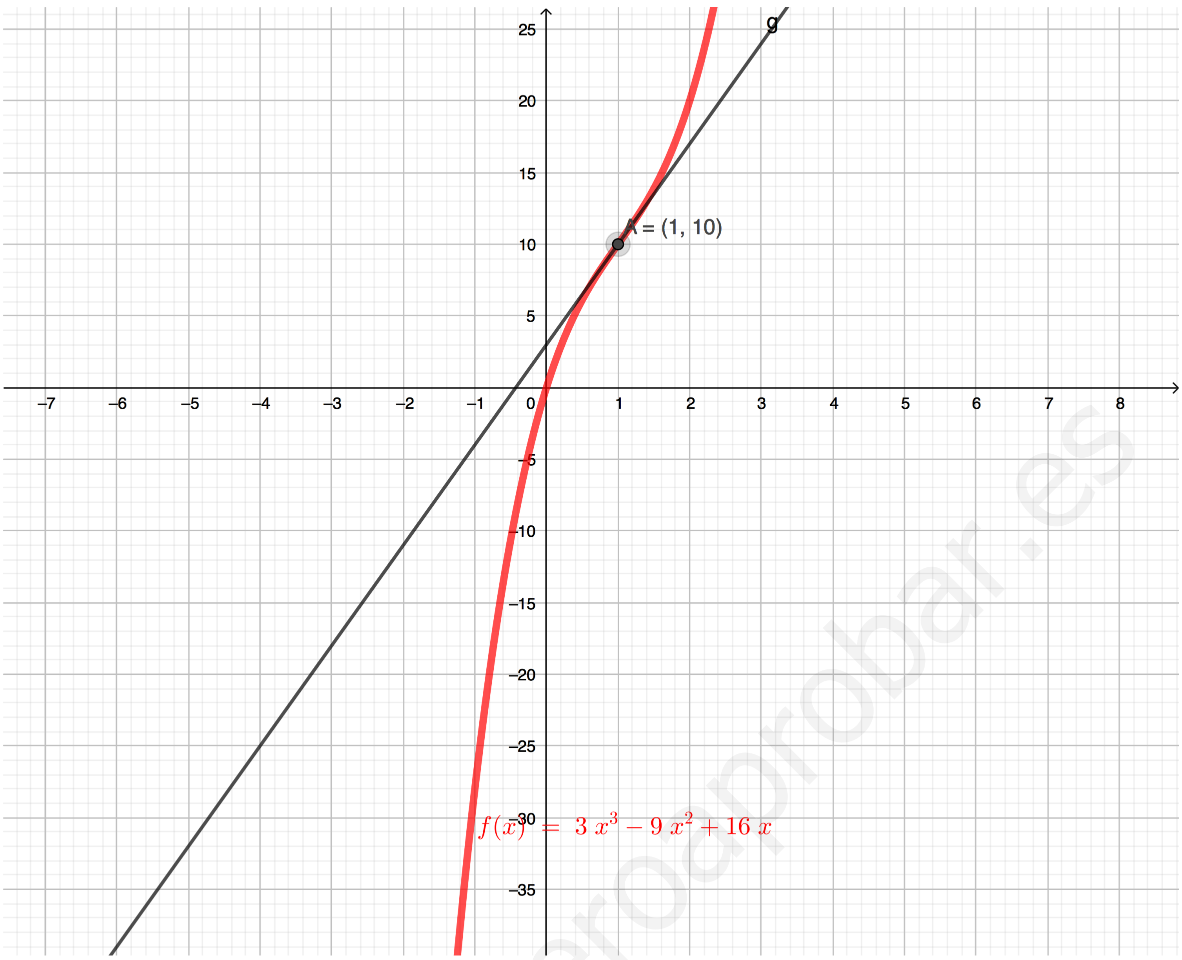




Sección 1 B1e2. Solución:

$$\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c \\ P.I.(1,10) \\ f'(1) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16 \\ f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(1) = 0 \\ f'(1) = 7 \\ f(1) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a \\ 3a + 2b + 16 = 7 \Rightarrow 3a - 6a + 16 = 7 \Rightarrow -3a = -9 \Rightarrow \\ a + b + 16 + c = 10 \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \Rightarrow \\ c = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 16x$$



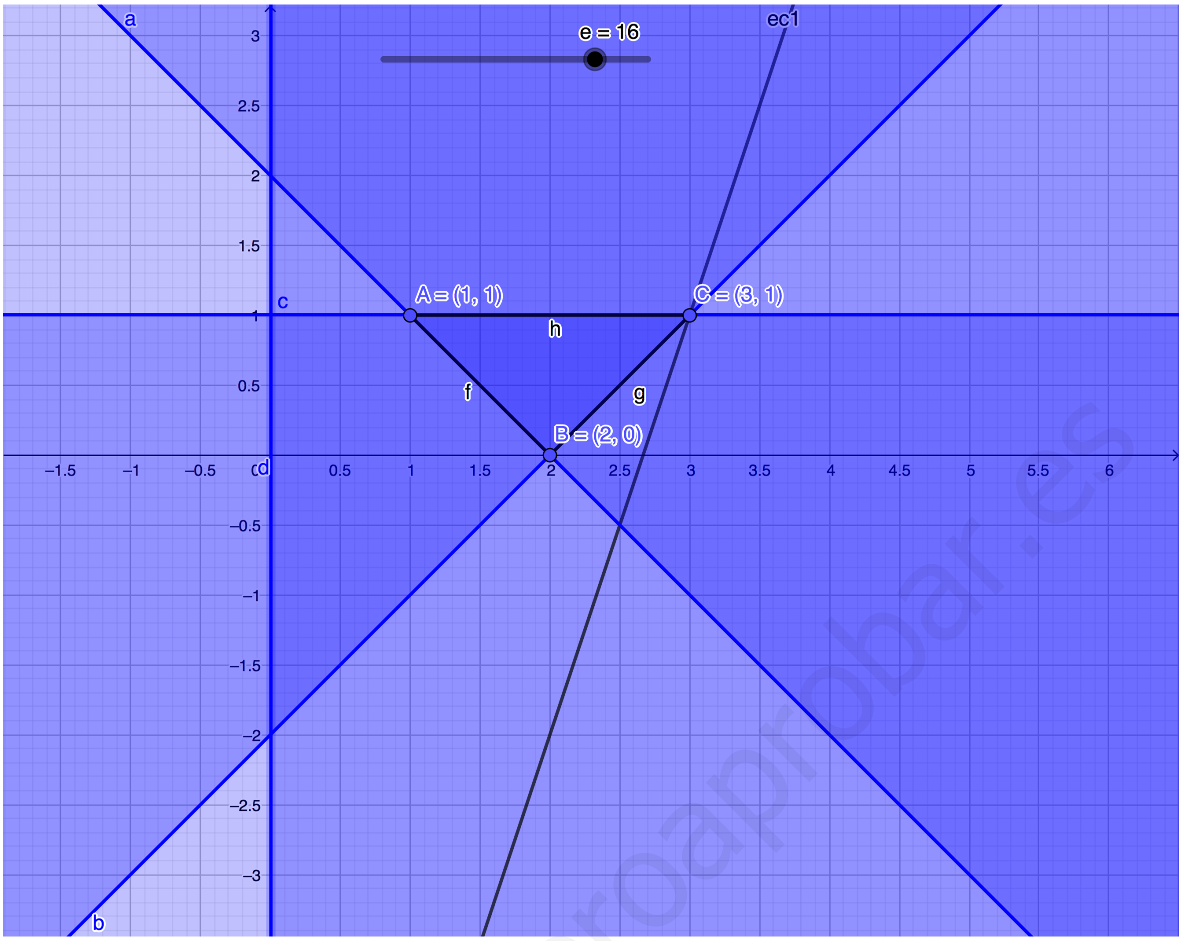
Sección 1 B2e1. Solución:
Llamaremos x al nº de botines pedido, y al nº de botas de media caña que nos piden y z al nº de botas de caña alta que nos solicitan.
El planteamiento y la solución vienen a continuación

$$\begin{cases} x - z = y \\ \dfrac{x}{3} = z \\ 150x + 200y + 250z = 5500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textit{De la } 1^{a} \textit{ y } 2^{a} \\ x - \dfrac{x}{3} - y = 0 \Rightarrow \dfrac{2x}{3} = y \\ \textit{Sustituyendo en la } 3^{a} \\ 150x + \dfrac{400x}{3} + 250\dfrac{x}{3} = 5500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textit{Multiplicando por } 3 \\ \textit{y dividiendo por } 10 \\ \textit{en la última} \\ 45x + 40x + 25x = 1650 \Rightarrow 110x = 1650 \\ \textit{Luego } x = 15,\ y = 10,\ z = 5 \end{cases}$$

Sección 1 B2e2. Solución:
La región factible está enmarcada por el triángulo de vértices (1,1), (3,1) y (2,0).

La función f(x,y)=6x-2y alcanza el mínimo en f(1,1)=4 y el máximo en en f(3,1)=16
En (2,0) resulta f(2,0)=12

$$\begin{cases} \textit{Los semiplanos} \\ x + y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 1, x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \textit{Definen la región}$$



Sección 2 B1e3. Solución:

Llamaremos T al suceso “elegido un alumno al azar resulta que ve televisión todos los días” y C al suceso “elegido un alumno al azar resulta que juega todos los días con la consola”

$$\begin{cases} a)\ P(T \cap C) = P(T) + P(C) - P(T \cup C) = 15\% + 25\% - 26\% = 14\% \\ b)\ P\left(T/C\right) = \dfrac{P(T \cap C)}{P(C)} = \dfrac{14\%}{25\%} = 56\% \end{cases}$$

Sección 2 B1e4. Solución:

$$\bar{x} = \frac{4.2 + ... + 7.3}{10} = 5.73$$

$$P(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \ (en\ nuestro\ caso\ 97\%)$$

$$1 - \alpha = 0'97 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'015 \Rightarrow 1 - 0'015 = 0'985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'17\ (ver\ tabla)$$

$$Luego\ (\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (5'73 - 2'17\frac{2'1}{\sqrt{10}}, 5'73 + 2'17\frac{2'1}{\sqrt{10}}) = (4'29, 7'17)$$

b) La fórmula que nos permite obtener el intervalo tiene el tamaño de la muestra n en el denominador, por tanto aumentando el tamaño de la muestra se reduce la longitud del intervalo.

c)

$$\overline{x} = \frac{4.2 + ... + 7.3}{10} = 5.73$$

$$P(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha \; (en\ nuestro\ \sup uesto\ 90\%)$$

$$1-\alpha = 0'90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'05 \Rightarrow 1-0'05 = 0'950 \Rightarrow z_{\alpha/2} < 2 \; (ver\ tabla)$$

$$Luego\ (\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (5'73 - 1'96\frac{2'1}{\sqrt{10}}\,,\, 5'73 + 1'96\frac{2'1}{\sqrt{10}}) = (4'43\,,\,7'03)$$

$$Como\ el\ \mathrm{int}ervalo\ es\ menor \Rightarrow \mu\ no\ puede\ ser\ 4$$

Sección 2 B2e3. Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x + t\ si\ x \le -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4\ si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Para\ continua\ en\ x = -1 \\ f(-1) = -1 + t = \lim\limits_{x \to -1^-} x + t = -1 + t = \lim\limits_{x \to -1^+} x^3 - 2x^2 + 4 = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$Si\ x > -1,\ f'(x) = 3x^2 - 4x,\ f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} Si\ f'(x) = 0 \\ x(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow Máx.\ en\ (0,4) \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow f''(\frac{4}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow Mín.\ en\ (\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)) = (\frac{4}{3}, 2'81) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow P.I.(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3})) = (\frac{2}{3}, 3'41) \\ f'''(x) = 6 \end{cases}$$

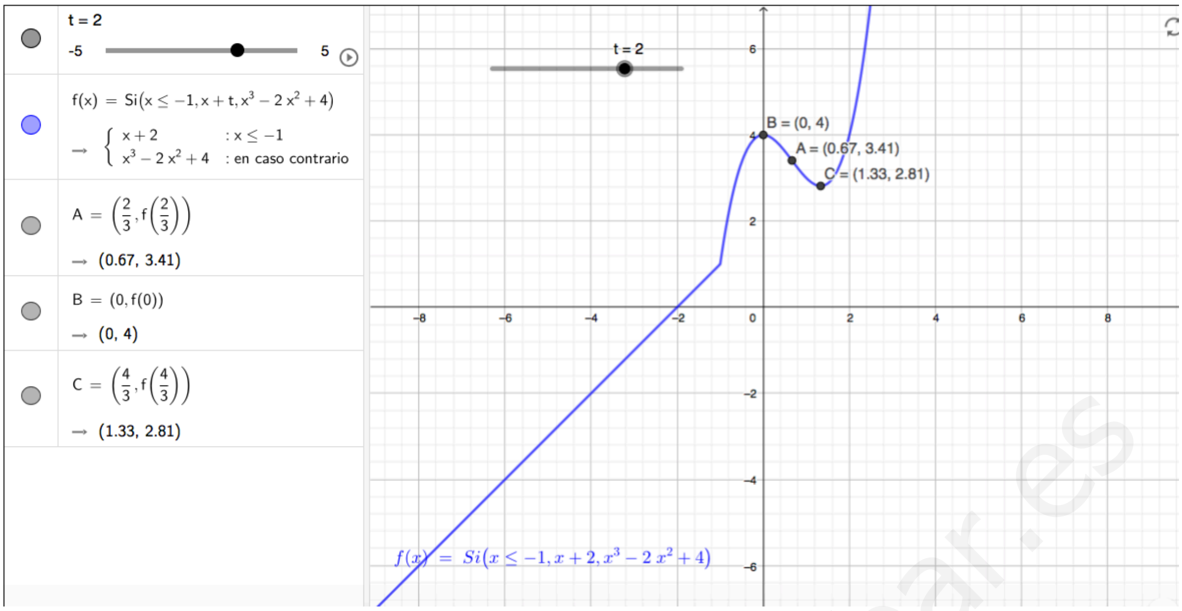
$$f'(x) = x(3x-4) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0\ si -1 < x < 0\ o\ si\ x > \frac{4}{3} \\ f'(x) < 0\ si\ 0 < x < \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1,0) \cup (\frac{4}{3}, \infty)\ creciente \\ (0, \frac{4}{3})\ decreciente \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + t\ si\ x \le -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4\ si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Para\ continua\ en\ x = -1 \\ f(-1) = -1 + t = \lim\limits_{x \to -1^-} x + t = -1 + t = \lim\limits_{x \to -1^+} x^3 - 2x^2 + 4 = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$Si\ x > -1,\ f'(x) = 3x^2 - 4x,\ f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} Si\ f'(x) = 0 \\ x(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow Máx.\ en\ (0,4) \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow f''(\frac{4}{3}) = 4 > 0 \Rightarrow Mín.\ en\ (\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)) = (\frac{4}{3}, 2'81) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow P.I.(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3})) = (\frac{2}{3}, 3'41) \\ f'''(x) = 6 \end{cases}$$

$$f'(x) = x(3x-4) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0\ si -1 < x < 0\ o\ si\ x > \frac{4}{3} \\ f'(x) < 0\ si\ 0 < x < \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1,0) \cup (\frac{4}{3}, \infty)\ creciente \\ (0, \frac{4}{3})\ decreciente \end{cases}$$



Sección 2 B2e4. Solución:

$$C(t)=2t^3-27t^2+120t \; si \; 1\le t\le 6 \Rightarrow \begin{cases} C'(t)=6t^2-54t+120 \Rightarrow \begin{cases} C'(t)=0 \\ t^2-9t+20=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C''(4)=-6<0 \Rightarrow Máx(4,C(4))=(4,176) \\ C''(5)=6>0 \Rightarrow Mín(5,C(5))=(5,175) \end{cases} \\ C''(t)=12t-54 \end{cases}$$

$$\text{Resumiendo}: \begin{cases} Crecimiento\,(1,4)\cup(5,6) \\ Decrecimiento\,(4,5) \\ Hora\ máx.\ venta\ la\ 4,\ y\ mínima\ la\ 5 \\ Valor\ máx.\ 176000\ botellas \\ Valor\ mín.\ 175000\ botellas \end{cases}$$

Sección 3 B1e5. Solución:

Llamaremos e al nº paquetes de cortitas de espelta pedido, a al nº de paquetes de cortitas de arroz pedido, y c al nº de paquetes de tortitas de chia.

$$Planteamiento \begin{cases} e=\dfrac{a}{3} \\ a=c+40 \\ 2'5e+3'5a+3c=1640 \end{cases} \Rightarrow \text{Resolución} \begin{cases} c=a-40 \\ 2'5\dfrac{a}{3}+3'5a+3a-120=1640 \\ 2'5a+10'5a+9a=5280 \Rightarrow 22a=5280 \Rightarrow a=240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=80 \\ c=200 \\ a=240 \end{cases}$$

Sección 3 B1e6. Solución:

$$\begin{cases} A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ C=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cdot C=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 24 & 1 \end{pmatrix} \\ (B-I)^T=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 22 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ X\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -2x_1 & 2x_1+2x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} -2x_1=2 \\ 2x_1+2x_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sección 3 B2e5. Solución:

Llamaremos A al suceso “elegido un habitante al azar resulta que ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas”. Llamaremos NA al suceso contrario. Llamaremos F al suceso “elegido un habitante al azar resulta que tiene problemas financieros”.

Por los datos sabemos

$$\begin{cases} P(A)=1\% \\ P\left(F/A\right)=70\% \\ P\left(F/NA\right)=5\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sabemos que} \\ P(F)=P(F\cap A)+P(F\cap NA) \text{ porque son disjuntos} \\ P\left(F/A\right)=\dfrac{P(F\cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(F\cap A)=P(A)\cdot P\left(F/A\right) \\ P\left(F/NA\right)=\dfrac{P(F\cap NA)}{P(NA)} \Rightarrow P(F\cap NA)=P(NA)\cdot P\left(F/NA\right) \end{cases} \Rightarrow P(F)=1\%\cdot 70\%+5\%\cdot 99\%=5'6\%$$

$$b)\ P\left(A/F\right)=\frac{P(F\cap A)}{P(F)}=\frac{70\%}{5'6\%}=12'5\%$$

Sección 3 B2e6. Solución:

(Es muy parecido al B6 de Junio del año pasado 2019).

$$a)\ \bar{x}=\frac{5+6+...+16}{10}=10'3, 1-\alpha=95\% \Rightarrow \alpha=0'05 \Rightarrow \alpha/2=0'025 \Rightarrow 1-\alpha/2=0'975 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1'96\ (\text{ver tabla})$$

$$\text{Luego } (10'3-1'96\frac{2}{\sqrt{10}}, 10'3+1'96\frac{2}{\sqrt{10}})=(9'06\ , 11'54) \text{ es el intervalo pedido.}$$

$$b)\ E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1>1'96\frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}>1'96\cdot 2 \Rightarrow n>3'92^2 \Rightarrow n=16$$