



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – SEPTIEMBRE 2018**

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema dependiente del parámetro m :

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro m .
- 2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

Ejercicio 2

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x}$. (ln denota el logaritmo neperiano)

- 2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de d tiene la función $\frac{x^d + 1}{x - 2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota.

Ejercicio 3 Sean A y B los planos:

$$A: (0, 1, 0) + t(1, -1, 2) + s(0, 0, 1) \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$B: x + 2y + 2z = 1$$

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano A .
- 2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de A y B .
- 3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos A y B .

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
- 3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2×2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

Ejercicio 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + ax & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) + b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = -2$.
- 3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.

Ejercicio 3

Sean el punto $A = (4, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

- 1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A .

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema dependiente del parámetro m :

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro m .

2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

1) Estudiamos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix} = 0 + m^2 + 0 - (0 + 0 + 2m^2) = -m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

Distinguimos dos casos distintos en función del valor de m .

CASO 1. $m \neq 0$.

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3 al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m = 0$.

El determinante de A es cero y el rango de A no es 3.

La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Veamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Como la 3ª columna son todo ceros calculamos el valor del menor de orden 3 que

resulta de quitar esta columna $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0.$

El rango de A/B es 3.

Como rango de A/B = 3 $\neq$ 2 = rango de A **el sistema es incompatible.**

Resumiendo: Si $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado y si $m = 0$ el sistema es incompatible.

2) Para $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución utilizando Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 3 & -2m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 3m^2 + 0 - 0 - 0 - 4m^2}{-m^2} = \frac{-m^2}{-m^2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ m & 0 & m \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 2m + 0 - 0 - 0 + 3m}{-m^2} = \frac{m}{-m^2} = -\frac{1}{m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & m & -2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -2m & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-3 + 0 + 4m^2 + 2 - 3m^2 - 0}{-m^2} = \frac{-1 + m^2}{-m^2} = \frac{1 - m^2}{m^2}$$

La solución del sistema es $x = 1; y = \frac{-1}{m}; z = \frac{1 - m^2}{m^2}$

Ejercicio 2

1) [2.5 PUNTOS] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x}$. ($\ln$ denota el logaritmo neperiano)

2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de d tiene la función $\frac{x^d + 1}{x - 2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota.

1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x} &= \frac{\operatorname{sen}(0) + 0}{\ln(1) + 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x^2) \cdot 4x + 1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{\cos(0) \cdot 0 + 1}{1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2) Si $f(x) = \frac{x^d + 1}{x - 2}$ la asíntota oblicua tiene ecuación $y = mx + n$ donde el valor de m se

calcula mediante el límite:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^d + 1}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^d + 1}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^d + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^d + 1}{x^2 - 2x}$$

Para que este límite exista y no sea cero debe ser el valor de $d = 2$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

En cuyo caso hallamos el valor de n mediante el límite:

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La asíntota oblicua existe cuando $d = 2$ y dicha asíntota tiene ecuación $y = x + 2$

Ejercicio 3 Sean A y B los planos:

$$A: (0,1,0) + t\overrightarrow{(1,-1,2)} + s\overrightarrow{(0,0,1)} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$B: x + 2y + 2z = 1$$

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano A.
- 2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de A y B.
- 3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos A y B.

1) $A: (0,1,0) + t\overrightarrow{(1,-1,2)} + s\overrightarrow{(0,0,1)} \quad t, s \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} P(0,1,0) \in A \\ \vec{u} = (1,-1,2) \\ \vec{v} = (0,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow A: \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - (y-1) = 0 \Rightarrow -x - y + 1 = 0$$

$$A: x + y - 1 = 0$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} A: x + y - 1 = 0 \\ B: x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_A = (1,1,0) \\ \vec{n}_B = (1,2,2) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{2}$$

Al no tener las coordenadas proporcionales los vectores normales de los planos no son paralelos y por tanto los planos A y B no son paralelos y se cortan en una recta.

Obtenemos la ecuación de la recta intersección:

$$\left. \begin{array}{l} A: x + y - 1 = 0 \\ B: x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - y \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 1 - y + 2y + 2z = 1 \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow \underline{y = -2z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x = 1 + 2z} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(1,0,0) \\ \vec{v}_r = (2,-2,1) \end{cases}$$

- 3) El ángulo entre los planos es el mismo que el ángulo entre los vectores normales y para hallar dicho ángulo utilizamos el producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} A: x + y - 1 = 0 \\ B: x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_A = (1,1,0) \\ \vec{n}_B = (1,2,2) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(A, B) = \cos(\vec{n}_A, \vec{n}_B) = \frac{\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B}{|\vec{n}_A| \cdot |\vec{n}_B|}$$

$$\cos(A, B) = \frac{(1,1,0) \cdot (1,2,2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1+2}{\sqrt{2} \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\text{ángulo}(A, B) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
 2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
 3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2×2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

1)

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+y & 3+1 \\ x+3y & x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+x & 1+3 \\ 3y+x & y+3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+y = 3+x \\ 4 = 4 \\ x+3y = 3y+x \\ x+3 = y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 0 = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = x}$$

Se cumple cuando $y = x$.

2)

$$A^2 = 6A \Rightarrow A \cdot A = 6A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9+x & 3+3 \\ 3x+3x & x+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6x & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9+x = 18 \\ 6 = 6 \\ 6x = 6x \\ x+9 = 18 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

Para que tenga inversa comprobamos si su determinante es no nulo cuando $x = 9$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$$

La matriz A no tiene inversa cuando $x = 9$.

3)

$$\left. \begin{array}{l} N \cdot X \cdot R = S \\ \text{Existe } N^{-1} \\ \text{Existe } R^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N^{-1} \cdot N \cdot X \cdot R \cdot R^{-1} = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1} \\ N^{-1} \cdot N = Id \\ R^{-1} \cdot R = Id \end{array} \right\} \Rightarrow Id \cdot X \cdot Id = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1}}$$

Ejercicio 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + ax & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) + b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
 2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = -2$.
 3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.

1)

Para que sea continua debe serlo en $x = 0$ y en $x = -2$.

En $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\operatorname{sen}(x) + b = 2\operatorname{sen}0 + b = b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 0$$

- Existe $f(0) = 2\operatorname{sen}(0) + b = b$
- Son iguales $\rightarrow b = 0$.

En $x = -2$ debe cumplirse:

- Existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + ax) = (-2)^2 + a(-2) = -2a + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

- Existe $f(-2) = -2 + 2 = 0$
- Son iguales $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \rightarrow a = 2$.

Necesitamos que sea $a = 2$ y $b = 0$.

3) Si $a = 3$, $b = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + 3x & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

Estudiemos la discontinuidad en $x = -2$:

- Existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + 3x) = (-2)^2 + 3(-2) = 4 - 6 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \neq -2 \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

- 4) Entre $x = -5$ y $x = -3$ la función es $f(x) = x + 2$ que corta al eje X ($y = 0$) en $x = -2$ que está fuera del intervalo $(-5, -3)$.

Calculamos la integral definida de la función entre -5 y -3 :

$$\int_{-5}^{-3} x + 2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-5}^{-3} = \left[\frac{(-3)^2}{2} + 2(-3) \right] - \left[\frac{(-5)^2}{2} + 2(-5) \right] = \frac{9}{2} - 6 - \frac{25}{2} + 10 = -4$$

El área es el valor absoluto de esta integral definida $\rightarrow \text{Área} = 4 \text{ u}^2$.

Ejercicio 3

Sean el punto $A = (4, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

- 1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A .
 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A .

- 1) Obtenemos el vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n}' = (1, 0, 0) \times (0, 1, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k + j = j + k = (0, 1, 1)$$

El vector normal del plano perpendicular a la recta r es el vector director de la recta $\rightarrow$

$\vec{n} = \vec{v}_r = (0, 1, 1)$. Obtenemos la ecuación general del plano:

$$\left. \begin{array}{l} A = (4, 0, 1) \in \text{plano} \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = (4, 0, 1) \in \text{plano} \\ \text{plano: } y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

$$\boxed{\text{Plano: } y + z - 1 = 0}$$

- 2) Necesitamos dos vectores directores para hallar el plano pedido y para ello obtengo el vector director de la recta r y un punto de la misma.

$$r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (0, 1, 1)$$

$$r: \begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z+2 \end{cases} \Rightarrow \text{Tomo } \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow P_r(2, 2, 0)$$

El plano que nos piden tiene como vectores directores $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$ y

$\overrightarrow{P_r A} = (4, 0, 1) - (2, 2, 0) = (2, -2, 1)$ y uno de sus puntos es $A = (4, 0, 1)$ por lo que su

ecuación es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r A} = (2, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ A(4, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-4+2y-2(z-1)+2(x-4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4+2y-2z+2+2x-8=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 3x+2y-2z-10=0}$$