Septiembre 1999.

OPCIÓN A.

1. *En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana. *(5 puntos)*

b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean x = helados de vainilla, y = helados de chocolate, z = helados de nata. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ y+z=1{,}20x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 1{,}20x-y-z=0 \end{cases}$$

b) Resolvamos el sistema por el método de Gauss (aplicar al sistema dado las transformaciones elementales necesarias hasta convertirlo en un sistema escalonado equivalente):

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 1{,}20x-y-z=0 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ -2{,}20y-2{,}20z=-132 \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ 2{,}20z=88 \end{cases} \Rightarrow z=40\ ,\ y=20\ ,\ x=50$$

es decir: 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata

Transformaciones elementales: (1) $E_2 - 4E_1$, $E_3 - 1{,}20E_1$ (2) $E_3 + 2{,}20E_2$

2. *Dada la función* $f(x)=\dfrac{bx}{x^2+1}$ *con b un parámetro real distinto de 0. Se pide:*

a) Determinar las asíntotas de la función f(x) para cualquier valor del parámetro b. *(4 puntos)*

b) Determinar el valor del parámetro b para que la función f(x) tenga un máximo en el punto (1 , 3). *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X Asíntotas verticales: no tiene pues $x^2+1\neq 0 \ \ \forall x$

X Asíntotas horizontales: como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ y = 0 (eje de abscisas) es una asíntota horizontal de la función.

X Asíntotas oblicuas: no puede tener, pues una función tiene como máximo una sola asíntota entre horizontales y oblicuas.

b) Si la función tiene un máximo en el punto (1 , 3), se cumplirá: $f(1)=3$, $f'(1)=0$

De la primera condición se obtiene: $\dfrac{b}{2}=3 \Rightarrow b=6$ y no es necesario utilizar la segunda condición.

www.yoquieroaprobar.es

3. *En una baraja española de 40 cartas se extraen dos cartas al azar, calcular razonadamente:*

a) la probabilidad de que las dos sean copas. *(3 puntos)*
b) la probabilidad de que al menos una sea de oros. *(3 puntos)*
c) la probabilidad de que sean de diferentes palos. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

Extraer dos cartas equivale a extraer una y, sin reponerla, extraer otra.

a) $p\left(C_1 \text{ I } C_2\right) = p\left(\text{C}_1\right) \cdot p\left(C_2 / C_1\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{90}{1560} = 0{,}0577$

b) Calculemos primero la probabilidad de que ninguna de las cartas sea de oros: $p\left(\overline{O}_1 \text{ I } \overline{O}_2\right) = \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{870}{1560}$

El suceso "al menos una sea de oros" es el suceso contrario de "ninguna es de oros". Por tanto:

$$p(\text{"}\textit{al menos una es de oros}\text{"}) = 1 - \frac{870}{1560} = \frac{690}{1560} = 0{,}4423$$

c) Es el suceso contrario a que sean del mismo palo. La probabilidad de que sean del mismo palo es $4 \cdot \dfrac{90}{1560} = \dfrac{360}{1560}$

luego la probabilidad de que sean de palos distintos es: $p(\text{"palos distintos"}) = 1 - \dfrac{360}{1560} = \dfrac{1200}{1560} = 0{,}7692$

www.yoquieroaprobar.es

Septiembre 1999.

OPCIÓN B.

1. *Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 30 pesetas y el de pienso compuesto 52 pesetas, se pide:*

a) ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(7 puntos)*
b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de Programación Lineal. Elaboremos una tabla con los datos y condiciones del problema:

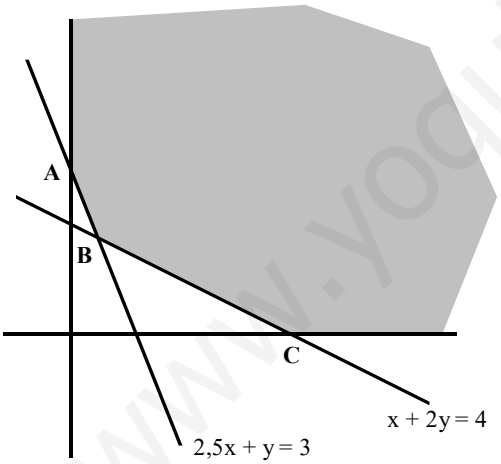
Alimento	**Cantidad**	**Hierro**	**Vitaminas**	**Precio**
maíz	x	2,5x	x	30x
pienso	y	y	2y	52y
	$x \geq 0\ ;\ y \geq 0$	≥ 3	≥ 4	$f(x,y)$

X La función objetivo (mínima) es:

$$f(x,y) = 30x + 52y$$

X Las restricciones son:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2{,}5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

Representemos gráficamente el conjunto de restricciones para encontrar la región factible:



X x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

X y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.

X La recta $2{,}5x + y = 3$ pasa por los puntos $(0,3)$ y $(2,-2)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $2{,}5x + y \geq 3$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $x + 2y = 4$ pasa por los puntos $(4,0)$ y $(0,2)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + 2y \geq 4$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es abierta y aparece en gris.

La función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(0,3) \Rightarrow f(0,3) = 30 \cdot 0 + 52 \cdot 3 = 156$

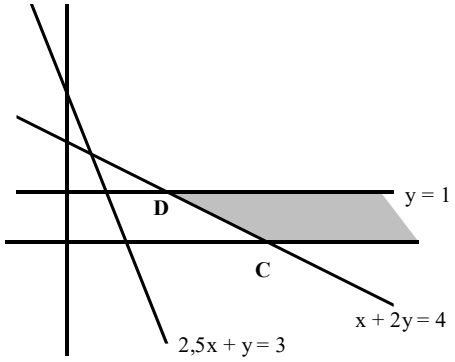
Vértice B: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) = 30 \cdot \frac{1}{2} + 52 \cdot \frac{7}{4} = 15 + 91 = 106$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(4,0) \Rightarrow f(4,0) = 120$

www.yoquieroaprobar.es

Por tanto, la función objetivo alcanza su valor mínimo en el vértice B, es decir, la dieta debe estar formada por medio kilo de maíz y un kilo y tres cuartos de pienso.

b) Si se añade la restricción $y \le 1$, la región factible cambia:



El nuevo vértice D tiene por coordenadas $(2,1)$ y la función objetivo vale en él: $f(2,1) = 30 \cdot 2 + 52 = 112$ que es menor que el valor que tiene en el vértice C. Por tanto, ahora la dieta más barata está formada por dos kilos de maíz y un kilo de pienso.

2. *Dada la función* $f(x) = -x^2 + x + 1$, *se pide:*

a) Determinar, en caso de que existan, los máximos y mínimos de la función f(x) en el intervalo $[-1,\ 4]$. *(4 puntos)*

b) Calcular el área del recinto limitado por: $y = f(x)$, $y = f'(x)$. *Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. (6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = -2x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}$ (punto crítico). Como $f''(x) = -2 < 0 \ \Rightarrow$ en $x = \frac{1}{2}$ la función tiene un máximo.

b) Consideremos la función diferencia: $f(x) - f'(x) = -x^2 + x + 1 + 2x - 1 = -x^2 + 3x$

Los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas son: $-x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 3$

$$\int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{2}\right) - 0 = -\frac{54}{6} + \frac{81}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \ \Rightarrow \ S = \frac{9}{2}u^2$$

3. *Una moneda está trucada de manera que 20 de cada 100 veces que se lanza sale cara. Se pide:*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar la moneda salga cara?, ¿y de que salga cruz?. (2 puntos)

b) ¿Cuántas veces se ha de lanzar esta moneda como mínimo para que la proporción de caras obtenidas no difiera de la proporción verdadera en más de un 2% con un nivel de confianza del 95%?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. (8 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $p(C) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ y $p(X) = 0{,}8$

b) La proporción de caras es de 0,2 y la proporción de cruces de 0,8.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

La cota de error (error máximo admisible) es de 0,02.

Por tanto: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \ \Rightarrow \ n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot (1-p)}{E^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}02^2} = 1536{,}64$ luego se habrá de lanzar un mínimo de 1537 veces.

www.yoquieroaprobar.es