

Junio 2004.

OPCIÓN A.

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcular AB y BA .

(4 puntos)

b) Discutir si existe solución del sistema $AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de

Gauss.

(6 puntos)

SOLUCIÓN.

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

b) La matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes es: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & -8 & -10 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Calculemos y

$$\text{comparemos sus rangos: } rg \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & -8 & -10 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{=} rg \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & -8 & -10 & 5 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{=} rg \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -20 & 10 \end{array} \right) \stackrel{(3)}{=} \\ = rg \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow rg A = rg B < n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado.}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) Cambio de orden en las filas. (2) $2F_3 + 3F_1$ (3) $F_3 - 5F_2$

$$\text{El sistema escalonado equivalente es: } \begin{cases} 2x + 7y = 0 \\ y - 4z = 2 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7y = 0 \\ y - 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow y = 2 + 4\lambda \Rightarrow$$

$$x = -\frac{7y}{2} = -\frac{14 + 28\lambda}{2} = -7 - 14\lambda$$

es decir:

$$x = -7 - 14\lambda, y = 2 + 4\lambda, z = \lambda$$

$$2. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si } x < 3 \\ \frac{10}{a-x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Calcular los valores del parámetro a para los que $f(x)$ es continua en $x = 3$.

(2,5 puntos)

b) Para $a = 0$, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(4,5 puntos)

c) Para $a = 4$, calcular las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$.

(3 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua debe suceder:

$$X \exists f(3) = \frac{10}{a-3}$$

$$X \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{10}{a-x} \Rightarrow 20 = \frac{10}{a-3} \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

X Además, para este valor de a se verifica que $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ por lo que la función es continua.

b) La función ahora es: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si } x < 3 \\ -\frac{10}{x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ y su función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 3 \\ \frac{10}{x^2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

El crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

X Para $x < 3$, la función derivada es $f'(x) = 3(x+1)(x-1) \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} f'(x) > 0 & f'(x) < 0 & f'(x) > 0 \\ | & | & | \\ | & 1 & 1 & | \end{array}$$

luego la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$ y decreciente en $(-1, 1)$

X Para $x \geq 3$, la función derivada es siempre positiva por lo que la función es creciente en $(3, \infty)$

c) La función es: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si } x < 3 \\ \frac{10}{4-x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

X Para $x < 3$, la función no tiene asíntotas porque es polinómica.

X Para $x \geq 3$:

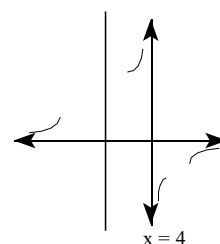
- la función tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 4$ porque $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty$. Además:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{10}{4-x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{10}{4-x} = -\infty$$

- El eje de abscisas $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función pues $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Además:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{4-x} = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{4-x} = 0^-$$

por lo que la posición relativa de la curva respecto a sus asíntotas es:



3. En una asignatura de primer curso de una titulación universitaria, asisten a clase, regularmente, 210 alumnos de los 300 que hay matriculados. Además se sabe que aprueban el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 15% de los que no asisten. Calcular la probabilidad de los cuatro sucesos siguientes:

a) Se elige al azar un alumno matriculado y resulta que:

i) Ha asistido a clase.

(1,5 puntos)

ii) No ha asistido a clase y ha aprobado.

(2 puntos)

iii) Ha aprobado.

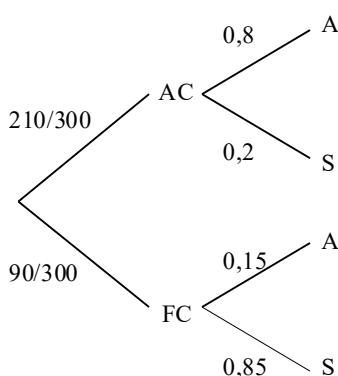
(3 puntos)

b) Se elige al azar un alumno de entre los que han aprobado y resulta que ha asistido a clase.

(3,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Confeccionemos el diagrama en árbol (AC = “asiste a clase”, FC = “falta a clase”, A = “Aprueba”, S = “Suspende”):



a) i) $p(AC) = \frac{210}{300} = 0,7$

ii) $p(FC \cap A) = \frac{90}{300} \cdot 0,15 = 0,3 \cdot 0,15 = 0,045$

iii) $p(A) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,15 = 0,605$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(AC | A) = \frac{p(AC) \cdot p(A | AC)}{p(AC) \cdot p(A | AC) + p(FC) \cdot p(A | FC)} = \frac{0,56}{0,605} = 0,926$$

Junio 2004.

OPCIÓN B.

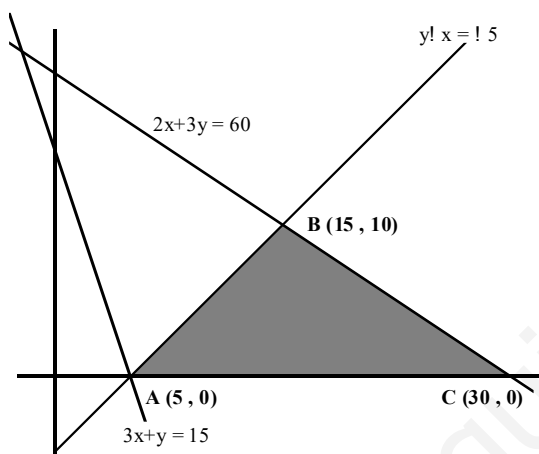
1. Se considera la función $f(x, y) = x - y$

a) Representar el conjunto $A = \{(x, y) / 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$ y calcular el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Alguna de las desigualdades que definen el conjunto A se podría eliminar de forma que siguiera siendo el mismo conjunto? (7 puntos)

b) Decir si la función $f(x, y)$ alcanza valor máximo en el conjunto $B = \{(x, y) / 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$. En caso afirmativo, calcular dicho valor. (3 puntos)

SOLUCIÓN.

a)



Calculemos las coordenadas de los vértices de la región factible:

$$\text{Vértice A: } \begin{cases} y = 0 \\ y - x = -5 \end{cases} \Rightarrow A(5, 0)$$

$$\text{Vértice B: } \begin{cases} y - x = -5 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(15, 10)$$

$$\text{Vértice C: } \begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow C(30, 0)$$

X El valor máximo de la función se alcanza en alguno de los vértices de la región factible:

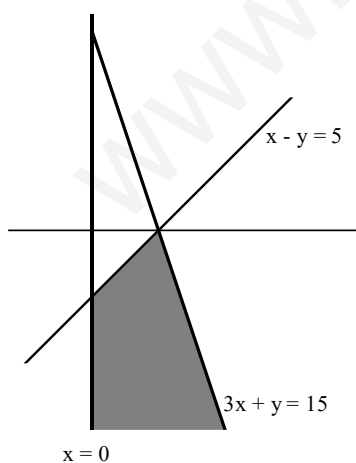
$$f(5, 0) = 5, \quad f(15, 10) = 5, \quad f(30, 0) = 30$$

luego el máximo se alcanza en el punto $(30, 0)$.

parte de la región factible.

X Se puede eliminar la desigualdad $3x + y \geq 15$ porque no forma

b) Representemos gráficamente el conjunto B:



La función no alcanzará un máximo en el conjunto B pues la región es abierta. Cuanto mayor sea la abscisa de un punto de la recta $3x + y = 15$ mayor valor alcanzará en él la función $f(x, y)$.

2. Sea $f(x) = x \cdot e^{-ax}$, con a un parámetro real.

a) Calcular los valores del parámetro a para que $f(x)$ tenga un máximo o un mínimo en $x = 3$. Para estos valores del parámetro, decir si $x = 3$ es máximo o mínimo. (4 puntos)

b) Para $a = 1/2$, escribir los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de $f(x)$. (6 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Si $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en $x = 3$, debe ser $f'(3) = 0$: $f'(x) = e^{-ax} + x e^{-ax}(-a) = e^{-ax}(1 - ax)$

$$\text{Se tiene entonces: } f'(3) = e^{-3a}(1 - 3a) = 0 \Rightarrow 1 - 3a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

La función, para el valor de a encontrado es: $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ y su derivada: $f'(x) = e^{-\frac{1}{3}x}\left(1 - \frac{1}{3}x\right)$

Para saber si se trata de un máximo o de un mínimo, sustituyamos $x = 3$ en $f''(x)$:

$$f''(x) = -\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\left(1 - \frac{1}{3}x\right) + e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\left(2 - \frac{1}{3}x\right) \Rightarrow f''(3) = -\frac{1}{3} e^{-1}(2 - 1) = -\frac{1}{3e} < 0 \text{ luego se trata de un máximo.}$$

b) La función es: $f(x) = x \cdot e^{2x}$ y sus derivadas primera y segunda:

$$f'(x) = e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(1 + 2x) \quad f''(x) = 2e^{2x}(1 + 2x) + e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}(2 + 2x) = 4e^{2x}(1 + x)$$

X Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 2x = 0 \quad (\text{pues } e^{2x} > 0) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}. \quad \text{Se tiene: } \begin{array}{c} f' < 0 \qquad \qquad f' > 0 \\ \hline \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad -1/2 \end{array}$$

luego la función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

X Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1. \quad \text{Se tiene: } \begin{array}{c} f'' < 0 \qquad \qquad f'' > 0 \\ \hline \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad -1 \end{array}$$

luego la función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, \infty)$

3. En un país se selecciona aleatoriamente una muestra de 900 personas. A la salida de los colegios electorales se les preguntó si habían votado al partido político X y 289 contestaron que sí y el resto que no. Determinar un intervalo que nos dé el porcentaje de votos del partido X con un nivel de confianza del 95%, explicando los pasos realizados para su obtención. (10 puntos)

SOLUCIÓN.

La proporción de votantes en la muestra es: $pr = \frac{289}{900} = 0,32$ y la proporción de no votantes es: $1 - pr = 0,68$

Para un nivel de confianza del 95% el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$\text{El error máximo admisible es: } E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot 0,68}{900}} = 0,03$$

Por tanto, el intervalo es: $(pr - E, pr + E) = (0,29, 0,35)$ es decir, entre el 29% y el 35%