

OPCIÓN A

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Calcule A^2 y $(A^2)^{-1}$. (5 puntos)
 b) Despeje X de la ecuación matricial $A^2 \cdot X = B$. (2 puntos)
 c) Calcule X . (3 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{7F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & -3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{25F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 175 & 0 & 28 & -7 \\ 0 & 25 & -3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1:175; F_2:25} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{28}{25} & -\frac{7}{25} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{25} & \frac{7}{25} \end{array} \right)$$

Luego $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{1}{25} \\ -\frac{3}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$

b) $A^2 \cdot X = B \Leftrightarrow (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot B \Leftrightarrow I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot B$

c) $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{1}{25} \\ -\frac{3}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

2. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a - bx}$ siendo a y b parámetros reales.

- a) Determine los valores de los parámetros a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 6$ es horizontal. (4 puntos)
 b) Para $a = 1$ y $b = -1$.
 b₁) Razone cuál es el dominio de $f(x)$ y la existencia de asíntotas verticales. (2 puntos)
 b₂) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. (4 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $X \quad f(2) = -4 \Rightarrow \frac{4}{a - 2b} = -4 \Rightarrow a - 2b = -1 \Rightarrow a = 2b - 1 \quad (*)$

$$f'(x) = \frac{2x(a - bx) + bx^2}{(a - bx)^2} = \frac{2ax - bx^2}{(a - bx)^2}$$

X Tangente en $x = 6$, horizontal: $f'(6) = 0 \Rightarrow \frac{12a - 36b}{(a - 6b)^2} = 0 \Rightarrow 12a - 36b = 0 \Rightarrow a = 3b \quad (*)$

De las igualdades (*): $2b - 1 = 3b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = -3$

b) La función es $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

b₁) Siendo una función racional, el dominio está formado por los valores de x que no anulen el denominador. Es decir: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{1+x} = \infty$

$$b_2) f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2+2x) \cdot (1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2+2x+2x+2x^2-4x-2x^2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$\forall x \in (-\infty, -1)$: $f' < 0 \Rightarrow$ la función es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$.

$\forall x \in (-1, \infty)$: $f' > 0 \Rightarrow$ la función es cóncava en el intervalo $(-1, \infty)$

La función no tiene puntos de inflexión pues aunque pasa de convexa a cóncava en $x = -1$, este punto no pertenece al dominio de la función.

3. De una baraja española de 40 cartas se retiran los oros y los ases. De las 27 cartas que quedan se extraen dos cartas al azar (sin devolver la primera), calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Ambas son del mismo palo. (3 puntos)

b) Al menos una es figura. (4 puntos)

c) Únicamente la segunda carta es una figura. (3 puntos)

SOLUCIÓN.

En la baraja quedan 9 cartas de copas, 9 de espadas y 9 de bastos. La extracción de la segunda carta está condicionada por la primera extracción al ser sin devolución.

a) Puesto que la composición de la baraja es homogénea en cuanto a los tres palos que quedan, la probabilidad de que las dos cartas sean de copas, de espadas o de bastos es la misma. Sea P_1 el suceso "la primera carta es de un determinado palo" y P_2 el suceso "la segunda carta es del mismo palo". Se tiene:

$$p(\text{mismo palo}) = 3 \cdot p(P_1 \cap P_2) = 3 \cdot p(P_1) \cdot p(P_2 / P_1) = 3 \cdot \frac{9}{27} \cdot \frac{8}{26} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13} \cong 0,3077$$

b) El suceso "al menos una carta es figura" es el suceso contrario al $A =$ "ninguna de las dos cartas es figura". Sea F_1 el suceso "la primera carta es una figura" y F_2 el suceso "la segunda carta es una figura"

$$p(A) = p(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) = p(\bar{F}_1) \cdot p(\bar{F}_2 / \bar{F}_1) = \frac{18}{27} \cdot \frac{17}{26} = \frac{17}{39} \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - \frac{17}{39} = \frac{22}{39} \cong 0,5641$$

c) Nos piden: $p(\bar{F}_1 \cap F_2) = p(\bar{F}_1) \cdot p(F_2 / \bar{F}_1) = \frac{18}{27} \cdot \frac{9}{26} = \frac{3}{13} \cong 0,23$

OPCIÓN B

1. Sean $T = \{(x, y) / y + 3x \geq 6, y + 1 \leq 0, 8x - 3y \leq 67\}$ y $f(x, y) = 3y - 8x$

- a) Represente gráficamente la región T . (3,5 puntos)
 b) Calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función $f(x, y)$ en T y diga en qué puntos se alcanzan. (4 puntos)
 c) Represente gráficamente la región $S = \{(x, y) / y + 3x \geq 6, y + 1 \leq 0\}$ y calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función $f(x, y)$ en S y diga en qué puntos se alcanzan. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

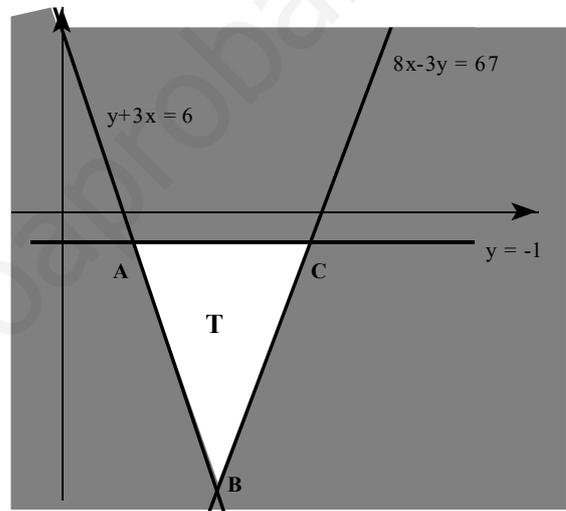
a) Representemos el semiplano solución de cada una de las inecuaciones. La intersección de todos ellos es la región T .

X $y + 3x = 6$ es la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, 6)$. El semiplano solución de la inecuación es el que no contiene al origen de coordenadas.

X $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ es la recta paralela al eje OX que pasa por el punto $(0, -1)$. El semiplano solución de la inecuación es el que no contiene al origen de coordenadas.

X $8x - 3y = 67$ es una recta que pasa por los puntos $(5, -9)$ y $(8, -1)$, por ejemplo. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.

La región T es la parte del plano que queda en blanco. Se trata de un triángulo de vértices:



Vértice A: $\begin{cases} y = -1 \\ y + 3x = 6 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{7}{3}, -1\right)$

B: $\begin{cases} y + 3x = 6 \\ 8x - 3y = 67 \end{cases} \Rightarrow 8x - 3(6 - 3x) = 67 \Rightarrow 8x - 18 + 9x = 67 \Rightarrow 17x = 85 \Rightarrow x = 5, y = -9 \Rightarrow B(5, -9)$

C: $\begin{cases} y = -1 \\ 8x - 3y = 67 \end{cases} \Rightarrow 8x + 3 = 67 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8, y = -1 \Rightarrow C(8, -1)$

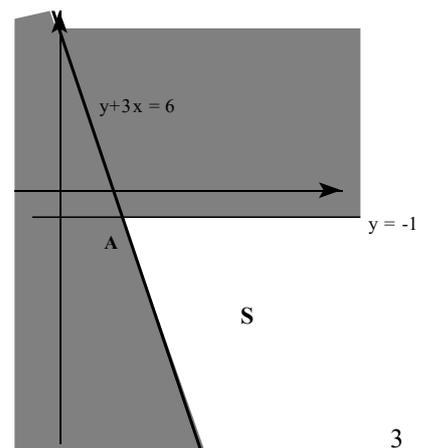
b) La función objetivo $f(x, y) = 3y - 8x$ se maximiza o minimiza en alguno de los vértices de T . Veamos qué valores alcanza la función en dichos vértices:

En A: $f\left(\frac{7}{3}, -1\right) = -3 - \frac{56}{3} = -\frac{65}{3}$; En B: $f(5, -9) = -27 - 40 = -67$

En C: $f(8, -1) = -3 - 64 = -67$

Por tanto, el mayor valor lo alcanza en $A\left(\frac{7}{3}, -1\right)$ y el mínimo en cualquiera de los puntos del segmento BC .

c) Ahora, la región S es abierta con un único vértice $A\left(\frac{7}{3}, -1\right)$ en el que la función alcanza el máximo. El mínimo no se alcanza nunca.



2. En una factoría la función de costes es $C(x) = x^3 - 3 \cdot \ln x$, donde $x > 0$ es el número de toneladas que se producen.

- a) Calcule el coste mínimo, si existe, y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste. (5 puntos)
- b) Si la función de ingresos es $I(x) = x^3 + 12x$ escriba la función de beneficios. (1 punto)
- c) Calcule los intervalos en los que la función de beneficios es creciente o decreciente y diga si existe beneficio máximo y en caso afirmativo el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho beneficio. (4 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $C'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3x^3 - 3}{x} = 0 \Rightarrow 3x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$ (valor crítico)

$C''(x) = \frac{9x^3 - 3x^3 + 3}{x^2} = \frac{6x^3 + 3}{x^2} \Rightarrow C''(1) > 0 \Rightarrow$ Para $x = 1$ los costes son mínimos.

Por tanto, se ha de producir 1 tonelada y el coste es de $C(1) = 1 - 3 \cdot 0 = 1$

b) La función de beneficios es: $B(x) = I(x) - C(x) = x^3 + 12x - x^3 + 3 \cdot \ln x = 12x + 3 \cdot \ln x$

c) $B'(x) = 12 + \frac{3}{x} = \frac{12x + 3}{x} = 0 \Rightarrow 12x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$ que no forma parte del dominio de la función pues x debe ser mayor que 0.

Como para $x > 0$, $B'(x) > 0 \Rightarrow$ la función de beneficios es siempre creciente.

3. En una gran ciudad se ha preguntado a 625 personas el gasto efectuado en medicinas el pasado año, obteniéndose un gasto medio de 75 euros. Se sabe que la desviación típica de esta variable es igual a 50. Calcule el intervalo que da el gasto medio con un nivel de confianza del 95%. Especifique los pasos realizados para obtener el resultado. (10 puntos)

SOLUCIÓN.

Se tiene una muestra de 625 personas ($n = 625$) en la que la media muestral es $\bar{x} = 75$ euros. La desviación típica poblacional es $\sigma = 50$ euros.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1,96$ con lo que el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(75 - 1,96 \cdot \frac{50}{\sqrt{625}}, 75 + 1,96 \cdot \frac{50}{\sqrt{625}} \right) = (71,08, 78,92)$$

Es decir, la media de la población está entre 71,08 euros y 78,92 euros con un nivel de confianza del 95%.