

OPCIÓN A

1. Un fabricante comercializa 2 modelos de pantalón vaquero, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 12 euros por unidad y otro para hombre con beneficio unitario de 20 euros. El próximo mes desea fabricar entre 50 y 750 pantalones para mujer y siempre un número no inferior al que fabrica para hombre. Además no tiene posibilidades de fabricar mensualmente más de 1000 unidades en total.

- Plantee un programa lineal que permita calcular el número de unidades de cada modelo que ha de fabricar para maximizar el beneficio total. (2 puntos)
- Resolviendo el programa anterior diga el máximo beneficio y cuántas unidades de cada modelo se han de comercializar. (5,5 puntos)
- Diga la solución del apartado anterior si el beneficio unitario es de 15 euros para cada uno de los dos modelos. (2,5 puntos)

NOTA: No es necesario considerar que las cantidades fabricadas sean números enteros.

SOLUCIÓN.

a) Sea x el número de pantalones de mujer e y el número de pantalones de hombre que deben fabricarse.

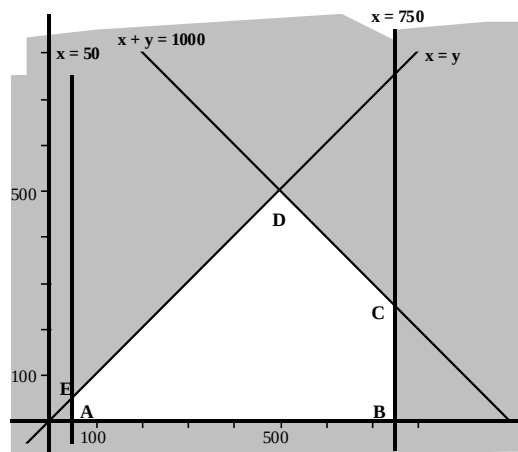
La función objetivo (función de beneficios) es $F(x, y) = 12x + 20y$ que debe maximizarse.

Las restricciones a que está sometida la solución son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 50 \leq x \leq 750 \\ x \geq y \\ x + y \leq 1000 \end{cases}$$

b) Representemos la región factible (puntos del plano que son solución del sistema de restricciones):

- La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene por solución el semiplano de la derecha. La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- Las rectas $x = 50$ y $x = 750$ son rectas paralelas al eje de ordenadas y la parte del plano solución a las inecuaciones $x \geq 50$ y $x \leq 750$ es la comprendida entre ambas.
- La recta $x = y$ es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. La inecuación $x \geq y$ tiene por solución el semiplano al que pertenece el punto $(100, 0)$ por ejemplo.
- La recta $x + y = 1000$ pasa por los puntos $(200, 800)$ y $(500, 500)$, por ejemplo. El semiplano solución de la inecuación $x + y \leq 1000$ es el que contiene al origen de coordenadas.
- La región factible es el pentágono de extremos A, B, C, D y E de la figura.



La solución óptima se tiene en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices y el valor en cada uno de ellos de la función objetivo:

$$\begin{aligned} A(50, 0) &\Rightarrow F(50, 0) = 600 \text{ €} ; & B(750, 0) &\Rightarrow F(750, 0) = 9000 \text{ €} ; & C(750, 250) &\Rightarrow F(750, 250) = 14000 \text{ €} \\ D(500, 500) &\Rightarrow F(500, 500) = 16000 \text{ €} ; & E(50, 50) &\Rightarrow F(50, 50) = 1600 \text{ €} \end{aligned}$$

Por tanto, deben comercializarse 500 pantalones de cada uno de los modelos y el beneficio que se obtendrá es de 16000 euros.

c) La región factible no varía y la nueva función objetivo es $F(x, y) = 15x + 15y$. El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible es:

$$F(50, 0) = 750 \text{ €} ; F(750, 0) = 11250 \text{ €} ; F(750, 250) = 15000 \text{ €} ; F(500, 500) = 15000 \text{ €} ; F(50, 50) = 1500 \text{ €}$$

Luego ahora la solución es la pareja de coordenadas de cualquier punto del segmento CD de la región factible. El beneficio será de 15000 euros.

2. Se considera la función $f(x) = ax^3 + b \cdot \ln x$ siendo a y b parámetros reales.

a) Determine los valores de a y b sabiendo que $f(1) = 2$ y que la derivada de $f(x)$ es nula en $x = 1$. (3 puntos)

b) Para $a = \frac{4}{3}$ y $b = 1$, determine los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$

(5 puntos)

c) Para $a = b = -2$, calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2 puntos)

SOLUCIÓN.

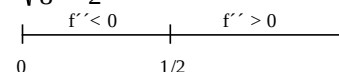
a) $f(1) = 2 \Rightarrow a + b \cdot 0 = 2 \Rightarrow a = 2$

$$f'(x) = 3ax^2 + \frac{b}{x} \text{ y como } f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow 6 + b = 0 \Rightarrow b = -6$$

b) Para los valores de a y b dados, la función es $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \ln x$. La concavidad y convexidad dependen del signo

$$\text{de } f''(x): f'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{x} = 4x^2 + \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = 8x - \frac{1}{x^2} = \frac{8x^3 - 1}{x^2}.$$

El denominador de $f''(x)$ es positivo $\forall x$. El numerador: $8x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ y como el dominio de definición de la función es $(0, \infty)$ la segunda derivada tiene los siguientes signos:



Luego la función es convexa en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y como la función es continua en todo su dominio, en

$x = \frac{1}{2}$ hay un punto de inflexión.

c) Ahora la función es: $f(x) = -2x^3 - 2 \cdot \ln x$.

Dando valores a x cada vez más grandes y positivos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Dando a x valores cada vez más próximos a cero (positivos): $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

3. Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica para pertenecer al comité de empresa.

a) Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

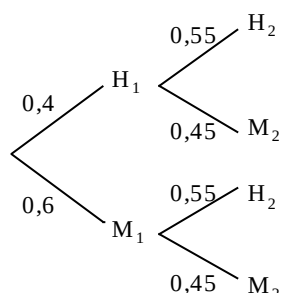
A = Ambos son hombres (2 puntos)

B = Sólo uno es mujer (3 puntos)

C = Ambos son mujeres (2 puntos)

b) Razone si el suceso contrario del suceso C es el A , el B , el $A \cap B$, el $A \cup B$ o algún otro suceso y calcule su probabilidad. (3 puntos)

SOLUCIÓN.



Sean H_1 y M_1 los sucesos “el trabajador elegido en la primera fábrica es hombre” y “el trabajador elegido en la primera fábrica es mujer” y H_2 y M_2 los sucesos correspondientes en la segunda fábrica. El diagrama en árbol de las posibles situaciones que pueden darse y sus correspondientes probabilidades es:

a) Se tiene: $p(A) = p(H_1 \cap H_2) = p(H_1) \cdot p(H_2) = 0,4 \cdot 0,55 = 0,22$

$$p(B) = p(H_1) \cdot p(M_2) + p(M_1) \cdot p(H_2) = 0,4 \cdot 0,45 + 0,6 \cdot 0,55 = 0,51$$

$$p(C) = p(M_1 \cap M_2) = p(M_1) \cdot p(M_2) = 0,6 \cdot 0,45 = 0,27$$

b) El suceso contrario del suceso “ambos son mujeres” es el suceso “alguno es hombre” y éste es el suceso que se verifica cuando “los dos son hombres” o cuando “uno es hombre y el otro mujer” luego:

$$\overline{C} = A \cup B \quad y \quad p(\overline{C}) = p(A \cup B) = 1 - 0,27 = 0,73$$

OPCIÓN B

1. Discuta y resuelva el siguiente sistema para todos los valores del parámetro a . (Utilice el método de Gauss para su resolución).

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = -1 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + (2a + 2)z = 6 - a \end{cases} \quad (10 \text{ puntos})$$

SOLUCIÓN.

Discusión del sistema: escribamos las matrices de los coeficientes A y ampliada B para comparar sus rangos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 3a+2 & 7-a \end{array} \right)$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_1 \leftrightarrow F_2$ (2) $F_2 - 4F_1$, $F_3 - F_1$

- Si $3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$: $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg } B = 3 \Rightarrow \text{rg } A \neq \text{rg } B \Rightarrow$ el sistema es incompatible
- Si $a \neq -\frac{2}{3}$, 4 : $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 4$: $\text{rg } A = \text{rg } B = 2 < n^\circ$ incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

Resolución del sistema:

- Para $a \neq -\frac{2}{3}$, debemos resolverlo en función del parámetro a .

El sistema dado es equivalente al sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y - az = -1 \\ (a - 4)y + (4a - 2)z = 3 \\ (3a + 2)z = 7 - a \end{cases}$$

que resolveremos de abajo hacia arriba.

De la tercera ecuación: $z = \frac{7-a}{3a+2}$. Sustituimos este valor en la segunda ecuación y despejamos y :

$$(a-4)y = 3 - (4a-2) \cdot \frac{7-a}{3a+2} = \frac{9a+6-28a+4a^2+14-2a}{3a+2} = \frac{4a^2-21a+20}{3a+2} \Rightarrow y = \frac{4a^2-21a+20}{(a-4)(3a+2)} = \frac{4a-5}{3a+2}$$

Por último sustituimos en la primera ecuación y despejamos x :

$$x = -1 - y + az = -1 - \frac{4a-5}{3a+2} + \frac{7a-a^2}{3a+2} = \frac{-3a-2-4a+5+7a-a^2}{3a+2} = \frac{-a^2+3}{3a+2}$$

- Para $a = 4$, el sistema escalonado equivalente es: $\begin{cases} x + y - 4z = -1 \\ 14z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{14}; \quad x = -\frac{1}{7} - \lambda; \quad y = \lambda$

2. Se considera la función $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{ax}$ siendo a un parámetro real.

a) Razone a qué es igual el dominio de $f(x)$. (1,25 puntos)

b) Determine el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(0, -4)$ (1,25 puntos)

c) Para $a = -2$, determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. ¿Existen máximos y mínimos relativos de $f(x)$?, en caso afirmativo, decir dónde se alcanzan y su valor. (7,5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$ (la recta real) porque es el producto de una función polinómica, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, y de una función exponencial cuyo dominio es $\mathbb{R}$.

b) Debe ser $f(0) = -4$: $a \cdot e^0 = -4 \Leftrightarrow a = -4$

c) La función es $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{-2x}$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + (x^2 - 2) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = 2e^{-2x}(x - x^2 + 2) = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2. \text{ Se tiene:}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f' < 0 & & f' > 0 & & f' < 0 & & \\ \hline & -1 & & 2 & & & \end{array}$$

Es decir, la función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y creciente en $(-1, 2)$.

Puesto que se trata de una función continua $\forall x$, en $x = -1$ hay un mínimo relativo con $f(-1) = -e^2$ y en $x = 2$ hay un máximo relativo con $f(2) = 2 \cdot e^{-4} = \frac{2}{e^4}$.

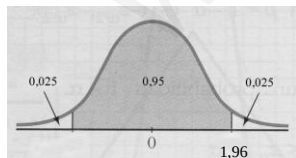
3. En una determinada comunidad autónoma se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Diga el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, que da la duración media de un contrato de ese tipo tenga una amplitud que no sea mayor que 10 días. Especifique los pasos realizados para obtener el resultado. (10 puntos)

SOLUCIÓN.

Se trata de obtener el tamaño mínimo de una muestra en una población cuyos datos son la duración de los contratos temporales y de la que se conoce: la desviación típica, $\sigma = 57$ días, y el radio del intervalo de confianza de la media (error máximo admisible), $E = 5$ días (la mitad de la amplitud), para un nivel de confianza del 95%.

$$\text{Se tiene: } E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para el nivel de confianza del 95%:



$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - 0,025 = 0,975$$

$$\text{y mirando la tabla: } F(1,96) = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$\text{Tenemos: } n = \left(\frac{1,96 \cdot 57}{5} \right)^2 = 499,25 \Rightarrow \text{el n}^\circ \text{ mínimo de contratos que deben revisarse es de 500.}$$