El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Una perfumería desea liquidar 100 frascos de perfume y 150 barras de labios que han quedado descatalogados en sus firmas, para ello lanza dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de un frasco de perfume y una barra de labios que se vende a 30 €. La oferta B consiste en un frasco de perfume y dos barras de labios que se vende a 40 €. No desea ofrecer menos de 10 lotes de la oferta A ni menos de 20 de la oferta B.

a) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia? *(2,5 puntos)*

b) ¿Cambiaría la respuesta al apartado a) si eliminamos el hecho de que desee ofrecer al menos 20 lotes de la oferta B? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en forma de tabla para escribir cómodamente la función objetivo y las restricciones:

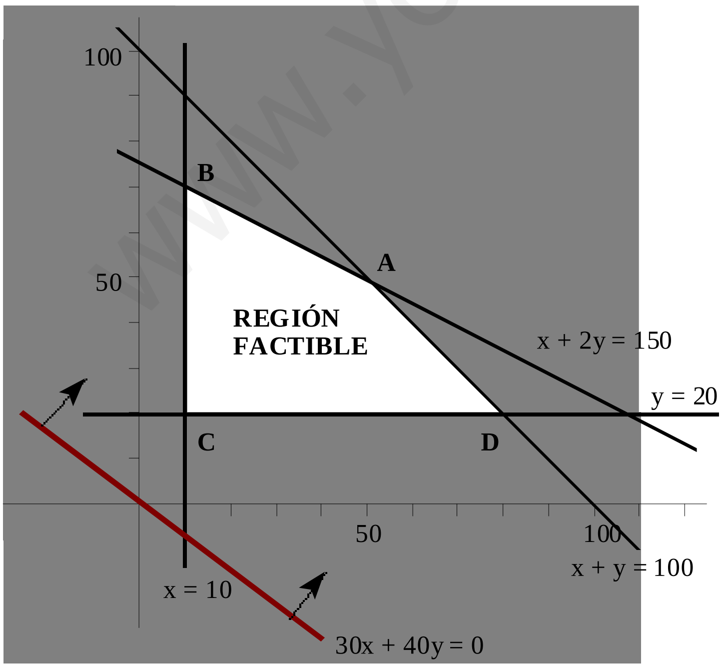
LOTES	NÚMERO	FRASCOS P.	BARRAS L.	VENTA
A	x	x	x	30x
B	y	y	2y	40y
	$x \geq 10$ $y \geq 20$	$x+y \leq 100$	$x+2y \leq 150$	$f(x,y)=30x+40y$

La función objetivo, que debe maximizarse, es $f(x,y)=30x+40y$

El conjunto de restricciones es: $\{\ x \geq 10\ ;\ y \geq 20\ ;\ x+y \leq 100\ ,\ x+2y \leq 150\ \}$

Dibujemos la región factible:

- La inecuación $x \geq 10$ tiene por solución el semiplano a la derecha de la recta $x=10$
- La inecuación $y \geq 20$ tiene por solución el semiplano que está por encima de la recta $y=20$
- La recta $x+y=100$ pasa por los puntos $(100,0)$ y $(0,100)$. El semiplano al que pertenece el origen de coordenadas es la solución de la inecuación $x+y \leq 100$
- La recta $x+2y=150$ pasa por los puntos $(10,70)$ y $(90,30)$ por ejemplo. El semiplano solución es el que contiene al origen de coordenadas.



El nivel 0 de la función objetivo: $f(x,y)=0 \iff 30x+40y=0$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$ y por el punto $(40,-30)$.

Al trasladarla, paralelamente a sí misma, hacia la región factible, el último vértice que toca es el $A(50,50)$ que es el que maximiza a la función objetivo.

Por tanto, debe vender 50 lotes de cada oferta.

b) Desaparece una restricción: $y \geq 20$. La región factible es ahora abierta pero la solución no cambia pues el último vértice de la misma que toca $f(x,y)=0$ al trasladarse hacia la derecha sigue siendo el A.

2. **a)** Derive las siguientes funciones $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\right)$, $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{x}}}}$, *(1 punto)*

b) Calcule $\int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) - $f'(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\frac{x}{\sqrt{x}}} = -\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+x\right)} = -\dfrac{1}{2x\left(\sqrt{x}+1\right)}$

- $g'(x) = \dfrac{-e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(x + x e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

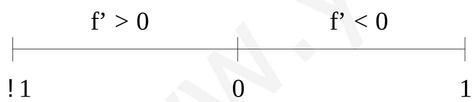
b) Obtengamos una primitiva de la función: $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{-1/2}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx = \dfrac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \ln|x| = 2\sqrt{x} - \ln|x|$

y entonces: $\int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[2\sqrt{x} - \ln|x|\right]_1^3 = 2\sqrt{3} - \ln 3 - 2$

3. Halle el dominio de definición, los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

- Dominio de definición: $1-x^2 > 0 \;\Rightarrow\; (1+x)(1-x) > 0 \;\Rightarrow\; x \in (-1, 1)$. Por tanto: $D(f) = (-1, 1)$
- Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$



Es creciente en $(-1, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$ y como se trata de una función continua en su dominio, en $x = 0$ tiene un máximo relativo.

4. En el departamento textil de unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que una camiseta tenga tara es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige una camiseta al azar.
a) Calcule la probabilidad de que la camiseta tenga tara. *(1 punto)*
b) Calcule la probabilidad de que la camiseta sea de la marca B. *(1 punto)*
c) Sabiendo que la camiseta elegida tiene tara, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sea A el suceso "la camiseta elegida es de la marca A. Su probabilidad es: $\mathrm{p}(\mathrm{A}) = \frac{100}{200} = 0,5$

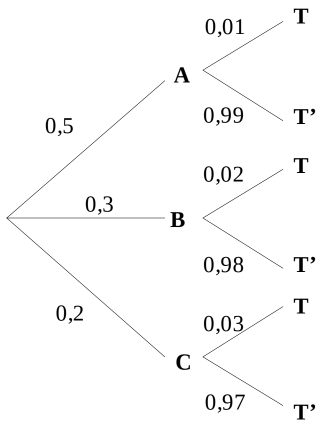
Sea B el suceso "la camiseta elegida es de la marca B" cuya probabilidad es: $\mathrm{p}(\mathrm{B}) = \frac{60}{200} = 0,3$

Sea C el suceso "la camiseta elegida es de la marca C" cuya probabilidad es: $\mathrm{p}(\mathrm{C}) = \frac{40}{200} = 0,2$

www.yoquieroaprobar.es

Sea T el suceso "la camiseta elegida tiene tara" y T' su suceso contrario "la camiseta elegida no tiene tara".

Organicemos las posibles situaciones mediante un diagrama de árbol:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(T) = p(A)\cdot p(T/A) + p(B)\cdot p(T/B) + p(C)\cdot p(T/C) =$$

$$= 0,5\cdot 0,01 + 0,3\cdot 0,02 + 0,2\cdot 0,03 = 0,017$$

b) $p(B) = 0,3$

c) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B/T) = \frac{p(B)\cdot p(T/B)}{p(T)} = \frac{0,3\cdot 0,02}{0,017} = 0,353$$

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz inversa de la matriz $B - I_3$ con $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(0,75 puntos)*

b) Calcule una matriz X tal que $BX - 4A = X$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 - 2F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{F_1 + F_3 \\ F_2 + F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{-F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow (B - I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $BX - 4A = X \iff BX - X = 4A \iff (B - I_3)X = 4A \iff X = (B - I_3)^{-1}\cdot 4A$

Por lo tanto: $$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

2. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el rango de la matriz A. *(0,5 puntos)*

b) Aplicar el apartado a) para resolver el sistema lineal $AX=0$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{2F_2-F_1 \\ 2F_3-F_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{F_2\leftrightarrow F_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \overset{F_3+3F_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}\,A=3$

b) Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es 3, el sistema homogéneo es compatible determinado y su única solución es la trivial: $x=y=z=0$

3. **a)** Calcule las derivadas de las funciones $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}}$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_0^1 \left(x-e^{-2x}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) - $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}=2\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(x+3) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2(x+3)}=\dfrac{4x+12-x}{2x(x+3)}=\dfrac{3x+12}{2x^2+6x}$

- $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}}=x^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow g'(x)=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$

b) Calculemos una primitiva de la función:

$$\int\left(x-e^{-2x}\right)dx=\int x\,dx-\int e^{-2x}\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}(-2)\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{-2x}}{2}=\frac{x^2+e^{-2x}}{2}$$

Y por tanto: $\int_0^1\left(x-e^{-2x}\right)dx=\left[\dfrac{x^2+e^{-2x}}{2}\right]_0^1=\dfrac{1+e^{-2}}{2}-\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{e^{-2}}{2}=\dfrac{1}{2e^2}$

4. Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono, CO_2, en el aire en partes por millón (ppm) en una ciudad, está relacionado con la población *p* expresada en miles de habitantes por la siguiente expresión $C(p)=\sqrt{\dfrac{p^2}{2}+17}$. La evolución del tamaño de población en esta ciudad en *t* años se estima que está dado por la relación $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$ en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en esta ciudad dentro de 3 años?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

El nivel medio diario de CO_2 al cabo de *t* años es: $C(t)=\sqrt{\dfrac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2}{2}+17}$. La velocidad de variación, al cabo de 3 años, será $C'(3)$. Tenemos:

www.yoquieroaprobar.es

$$C'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2}{2}+17}}\cdot\frac{1}{2}\,2\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)0{,}2t=\frac{0{,}2t\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)}{2\sqrt{\frac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2}{2}+17}}\quad\Rightarrow\quad C'(3)=\frac{2{,}4}{10}=0{,}24\text{ ppm}$$

5. La edad a la que obtienen el permiso de conducir los habitantes de una determinada población es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 24 años y desviación típica 4 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 habitantes de dicha población. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de obtención del permiso de conducir.

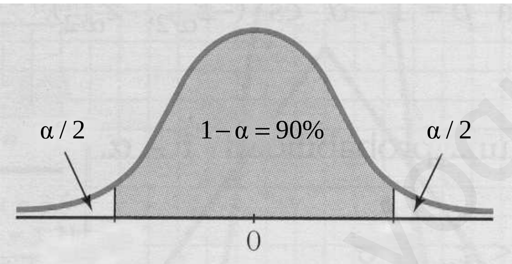
a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$? *(1 punto)*

b) Halle el intervalo de confianza al 90% para $\overline{X}$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Por el teorema central del límite, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu_{\overline{X}}=\mu=24$ años y desviación típica $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{10}=0{,}4$. Es decir, la media de las muestras se distribuyen mediante una normal $N(24\,;0{,}4)$. La media es entonces de 24 años y como la varianza es el cuadrado de la desviación típica: $\operatorname{var}\left(\overline{X}\right)=0{,}4^2=0{,}16$.

b) Obtengamos el valor crítico correspondiente a una probabilidad del 90%:



$$1-\alpha=0{,}9\quad\Rightarrow\quad\alpha=0{,}1\quad\Rightarrow\quad\frac{\alpha}{2}=0{,}05\quad\Rightarrow\quad1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95$$

Observando la tabla: $z_{\alpha/2}=1{,}645$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\mu-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \mu+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Es decir: $\left(24-1{,}645\cdot0{,}4\ ;\ 24+1{,}645\cdot0{,}4\right)=\left(23{,}342\ ;\ 24{,}658\right)$

www.yoquieroaprobar.es