Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Un ganadero puede comprar dos tipos de pienso, A y B, para alimentar a sus cerdos. Cada saco de pienso A contiene 4 kilos de cereales y 2 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 4 euros. Cada saco de pienso B contiene 2 kilos de cereales y 3 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 5 euros. Para alimentar a sus cerdos quiere tener, al menos, 160 kilos de cereales y 120 kilos de bellotas. Como tiene que transportar los sacos en su furgoneta, no quiere comprar, entre los dos tipos de pienso, más de 70 sacos. ¿Cuántos sacos de cada tipo de pienso tiene que comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

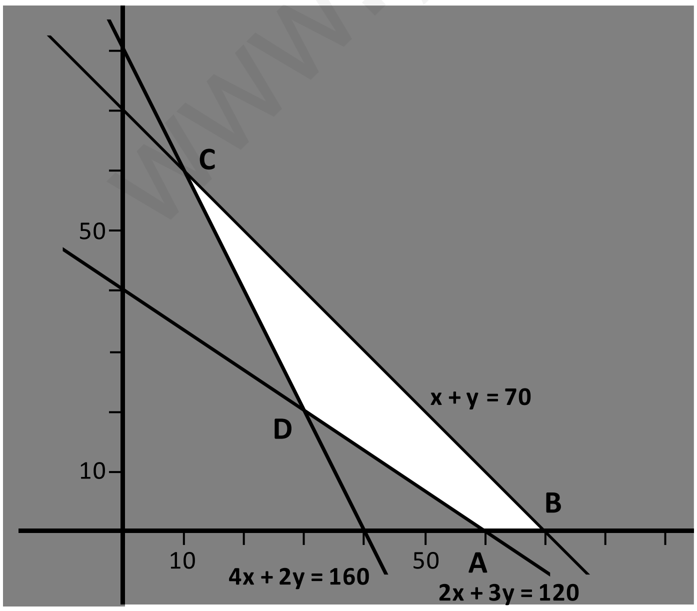
TIPOS DE PIENSO	Nº SACOS	CEREALES	BELLOTAS	COSTE
A	x	4x	2x	4x
B	y	2y	3y	5y
	$x \geq 0 \;\;;\;\; y \geq 0 \;\;;\;\; x+y \leq 70$	$4x+2y \geq 160$	$2x+3y \geq 120$	$F(x,y)=4x+5y$

La función objetivo, que debe ser mínima, es el coste: $F(x,y)=4x+5y$

Las restricciones a que debe estar sometida la solución son:

$$x \geq 0 \;\;;\;\; y \geq 0 \;\;;\;\; x+y \leq 70 \;\;;\;\; 4x+2y \geq 160 \;\;;\;\; 2x+3y \geq 120$$

Dibujemos la región factible, solución del sistema de restricciones:



▪ La recta $x=0$ es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

▪ La recta $y=0$ es el eje de abscisas. La solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior.

▪ La recta $x+y=70$ pasa por los puntos $(70,0)$ y $(0,70)$. La solución de $x+y \leq 70$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

▪ La recta $4x+2y=160 \Leftrightarrow 2x+y=80$ pasa por los puntos $(40,0)$ y $(0,80)$. La solución de la inecuación $4x+2y \geq 160$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

▪ La recta $2x+3y=120$ pasa por los puntos $(60,0)$ y $(0,40)$. La solución de $2x+3y \geq 120$ es el semiplano al que no pertenece el origen.

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero ABCD.

La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $A(60,0)$: $F(60,0)=240$

Vértice B: $B(70,0)$: $F(70,0)=280$

Vértice C: $\begin{cases} 4x+2y=160 \\ x+y=70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=80 \\ -x-y=-70 \end{cases} \Rightarrow x=10\ ,\ y=60 \Rightarrow C(10,60)$: $F(10,60)=340$

Vértice D:

$$\begin{cases} 4x+2y=160 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-160 \\ 4x+6y=240 \end{cases} \Rightarrow 4y=80 \Rightarrow y=20\ ,\ x=30 \Rightarrow D(30,20):\ F(30,20)=220$$

A la vista de los resultados obtenidos, la función objetivo es mínima en el vértice D. El ganadero debe comprar 30 sacos del pienso A y 20 sacos del B, con lo que minimizará el coste que será de 220 euros.

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{4x+2}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) La función es racional. El dominio está formado por todos los valores de x menos los que anulen al denominador:

$$4x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

b) $x^2+2>0\ \forall x$. Por lo tanto $\frac{x^2+2}{4x+2}>0$ para los valores de x que hagan $4x+2>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$.

La función es positiva $\forall x \in \left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x=-\frac{1}{2}$ pues $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x^2+2}{4x+2}=\infty$.

▪ Asíntotas horizontales: No tiene pues $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{4x+2}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{4x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{4x^2+2x}=\frac{1}{4}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{4x+2}-\frac{x}{4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+8-4x^2-2x}{16x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+8}{16x+8}=-\frac{2}{16}=-\frac{1}{8}$$

Luego la recta $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$ es una asíntota oblicua de la función.

d) $f'(x)=\dfrac{2x\left(4x+2\right)-\left(x^2+2\right)4}{\left(4x+2\right)^2}=\dfrac{8x^2+4x-4x^2-8}{\left(4x+2\right)^2}=\dfrac{4x^2+4x-8}{\left(4x+2\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; 4x^2+4x-8=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+x-2=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \;\Rightarrow\; x=-2\;,\; x=1$ (valores críticos)

$f''(x)=\dfrac{\left(8x+4\right)\left(4x+2\right)^2-\left(4x^2+4x-8\right)2\left(4x+2\right)4}{\left(4x+2\right)^2} \;\Rightarrow$ $f''\left(-2\right)<0 \;\Rightarrow\; x=-2$ es un máximo relativo: $\left(-2\,,-1\right)$

$f''\left(1\right)>0 \;\Rightarrow\; x=1$ es un mínimo relativo: $\left(1\,,\dfrac{1}{2}\right)$

3. *(3 puntos)* Un estudiante se va a examinar de Física y de Historia. La probabilidad de que apruebe el examen de Física es 0,8, la de que apruebe el examen de Historia es 0,7 y la de que apruebe los dos exámenes es 0,6.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

b) *(1 punto)* Si aprueba el examen de Física, ¿cuál es la probabilidad de que también apruebe el de Historia?

c) *(1 punto)* Sea *A* el suceso "el estudiante aprueba el examen de Física" y *B* el suceso "el estudiante aprueba el examen de Historia". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

SOLUCIÓN.

Sea A el suceso "el estudiante aprueba el examen de Física" y B el suceso "el estudiante aprueba el examen de Historia". Se tiene: $p\left(A\right)=0{,}8\;;\;p\left(B\right)=0{,}7\;;\;p\left(A\cap B\right)=0{,}6$.

a) $p\left(A\cup B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(A\cap B\right)=0{,}8+0{,}7-0{,}6=0{,}9$

b) $p\left(B/A\right)=\dfrac{p\left(B\cap A\right)}{p\left(A\right)}=\dfrac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$

c) $p\left(A\cap B\right)=0{,}6\quad;\quad p\left(A\right)=0{,}8\quad;\quad p(B)=0{,}7$

Como $p\left(A\cap B\right)\neq p\left(A\right)\cdot p\left(B\right) \;\Rightarrow$ los sucesos no son independientes.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Un pintor ha comprado pintura de 3 colores: azul, roja y verde. Cada kilo de pintura azul cuesta 2 euros, cada kilo de pintura roja cuesta 4 euros y cada kilo de pintura verde cuesta 3 euros. En total ha comprado 500 kilos de pintura y se ha gastado 1400 euros. Además, sabemos que la suma de las cantidades de pintura azul y verde es el triple que la cantidad de pintura roja. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad de pintura de cada color que ha comprado.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cantidad de pintura azul, y la de pintura roja, z la de pintura verde. Se tiene:

De la cantidad de pintura comprada: $x+y+z=500$

Del coste de la compra: $2x+4y+3z=1400$

De la relación entre las cantidades de pintura: $x+z=3y \;\Leftrightarrow\; x-3y+z=0$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 2x+4y+3z=1400 \\ x-3y+z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=500 \\ 2y+z=400 \\ -4y=-500 \end{cases} \Rightarrow \ y=\frac{500}{4}=125 \quad , \quad z=400-250=150 \quad , \quad x=500-125-150=225$$

Luego ha comprado 225 kg de pintura azul, 125 kg de pintura roja y 150 kg de pintura verde.

b) Utilizamos el método de Gauss para calcular la matriz inversa de la dada, caso de que exista:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3:(-8)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/8 \end{array}\right) \overset{F_1-3F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}$$ es la matriz inversa de la dada.

Comprobemos el resultado: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4+3/4 & 3/8-3/8 \\ 2/4-2/4 & 6/8+2/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, encontrar a y b de forma que $f(2) = 4$ y f tenga un mínimo relativo en $x = 1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(e^{3x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{4x^4} - 9\right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) $f(2)=4 \ \Rightarrow \ 8a+2b=4 \quad (*)$

$x=1$ mínimo relativo $\Rightarrow \ f'(1)=0: \quad f'(x)=3ax^2+b \ \Rightarrow \ f'(1)=3a+b=0 \quad (*)$

De las igualdades (*): $\begin{cases} 8a+2b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+b=2 \\ -3a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \ a=2 \ , \ b=-6$

b) Calculemos una primitiva:

$$\int \left(e^{3x}+\frac{7}{x}+\frac{3}{4x^4}-9\right)dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot 3\cdot dx + 7\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{4}\int x^{-4}\,dx - 9\int dx = \frac{1}{3}e^{3x}+7\ln x-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{-3}}{3}-9x = \frac{1}{3}e^{3x}+7\ln x-\frac{1}{4x^3}-9x$$

Se tiene entonces:

$$\int_1^2 \left(e^{3x}+\frac{7}{x}+\frac{3}{4x^4}-9\right)dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}+7\ln x-\frac{1}{4x^3}-9x\right]_1^2 = \left(\frac{e^6}{3}+7\ln 2-\frac{1}{32}-18\right)-\left(\frac{e^3}{3}+7\ln 1-\frac{1}{4}-9\right) = \frac{e^6-e^3}{3}+7\ln 2+\frac{7}{32}-9$$

3. *(3 puntos)* El peso (en kilos) de los habitantes de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de la ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 10 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 8. Elegimos 8 habitantes y los pesamos, con los siguientes resultados:

60, 75, 105, 98, 65, 60, 87, 73.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de esta ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

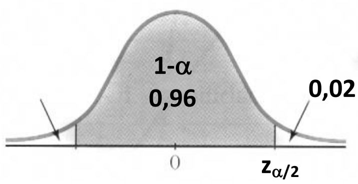
SOLUCIÓN.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza no debe ser mayor que 10 kilos, el radio del intervalo (error máximo admisible) es de 5 kilos.

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E} \right)^2$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$1-\alpha = 0{,}96 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0{,}96 = 0{,}04 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}02 \;\Rightarrow\; 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0{,}02 = 0{,}98$



Buscamos en la tabla el valor más aproximado a $0{,}98$ y se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}05$.

Se tiene entonces: $n = \left(\dfrac{2{,}05 \cdot 15}{5} \right)^2 = 37{,}8 \;\Rightarrow$ Debe tomarse una muestra de 38 habitantes.

b) Calculemos la media de la muestra: $\overline{X} = \dfrac{60+75+105+98+65+60+87+73}{8} = \dfrac{623}{8} = 77{,}875$ kilos

Aunque la muestra sea pequeña, como la población de partida es normal también lo es la distribución de las medias muestrales cualquiera que sea su tamaño.

El radio del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}05 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{8}} = 10{,}87$

El intervalo de confianza para la media de la población es entonces: $\left(\overline{X}-E \;,\; \overline{X}+E\right) = \left(67 \;,\; 80{,}745\right)$