



## MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

### OPCIÓN A

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

- a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)
- b) Estudia si hay alguna cantidad  $k$  que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

a) Considerando  $x$  los combates ganados,  $y$  los combates nulos y  $z$  los perdidos, se tiene

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + z = 40 \\ 6x + 4y + z = 72 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ 6 & 4 & 1 & 72 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - 6F_1 \\ \iff \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & -2 & -5 & -48 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 = F_3 - 2F_2 \\ \iff \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz y de la matriz ampliada es 3, **sistema compatible determinado**, con solución

$$x = 8 \quad y = 4 \quad z = 8$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + z = 40 \\ kx + 4y + z = 72 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 40 \\ k & 4 & 1 & 72 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - kF_1 \\ \iff \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 4-k & 1-k & 72-20k \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 = F_3 + (4-k)F_2 \\ \iff \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & k-7 & -8 \end{array} \right)$$

Para  $k = 7$  (7 mil euros) el rango de la matriz es 2 y el de la ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Para el resto de valores el sistema tiene solución única.



2. Sean las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = x^2/4$  y  $g(x) = 2\sqrt{x}$ .

- a) Halla los puntos de corte de las gráficas de  $f$  y  $g$ . (1 punto)  
 b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

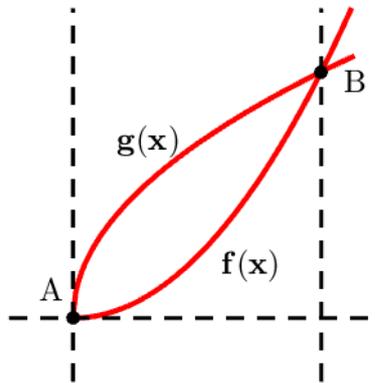
a) Los puntos de corte  $(x, y)$  serán los que cumplan

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases} \iff \frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \iff x^4 - 64x = 0 \iff x(x^3 - 64) = 0$$

Con soluciones

$$A(0, 0) \quad B(4, 4)$$

b)



Atendiendo a la gráfica se tendrá

$$\text{Área} = \int_0^4 \left( 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[ \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \frac{16}{3} u^2$$

3. Dadas las rectas  $r : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$  y  $s : x + 1 = \frac{y-1}{2} = z$ . Calcula:

- a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)  
 b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)  
 c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto  $A(1, 2, 1)$ . (1 punto)

a)

$$r : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - 2y \\ z = 1 \end{cases} \iff (x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(-2, 1, 0) \iff \vec{v}_r = (-2, 1, 0)$$

Por la propia expresión de  $s$  en su forma continua, se tiene

$$\vec{v}_s = (1, 2, 1)$$



b) El ángulo  $\alpha$  que forman dos rectas es el que forman sus vectores directores

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|} = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

es decir, son recta perpendiculares.

c) Los vectores directores de las rectas engendran el plano y si pasa por el punto  $A$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + 2y - 5z = 0$$

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)
- b) Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)

Se tiene que  $P(A) = 1/2$  y  $P(B) = 1/2$ . Además,  $P(1/A) = 1/3$  y  $P(1/B) = 1/6$ .

a) La probabilidad de sacar un 1 está determinado por la urna elegida

$$P(1) = P(1 \cap A) + p(1 \cap B) = P(1/A) \cdot P(A) + p(1/B) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbf{0.25}$$

b) Para calcular el suceso elegir la urna A condicionado a tener una bola con el número 1 aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(A/1) = \frac{P(1 \cap A)}{p(1)} = \frac{P(1/A) \cdot P(A)}{p(1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} = \mathbf{0.6666}$$



**OPCIÓN B**

1. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, en función de los valores *reales* de  $k$ , si la matriz  $B \cdot A$  tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para  $k = 1$ . (1.5 puntos)  
 b) Estudia, en función de los valores *reales* de  $k$ , si la matriz  $A \cdot B$  posee inversa. (1 punto)

a)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & 2+k \end{pmatrix} \quad |B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & 2+k \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3 = (k - (-1 + i\sqrt{2}))(k - (-1 - i\sqrt{2}))$$

sin raíces reales, **posee inversa para todo valor real de  $k$ .**

•  $k = 1$  se tiene que  $|B \cdot A| = 6$

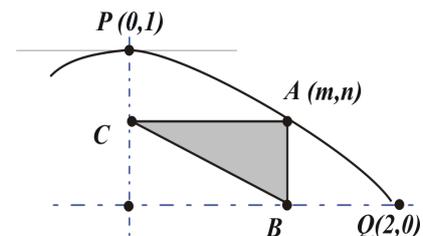
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Adj}(B \cdot A))^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (B \cdot A)^{-1} = \frac{(\text{Adj}(B \cdot A))^t}{|B \cdot A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad F_2 = F_2 - kF_3 \quad \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 2k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

**no posee inversa para ningún valor de  $k$**

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos  $P(0,1)$  y  $Q(2,0)$  de la gráfica de la función  $y = a + bx + cx^2$  con tangente en el punto  $P$  paralela al eje  $OX$ .



- a) Calcula los valores de  $a, b$  y  $c$ . (1 punto)  
 b) Con  $a = 1, b = 0$  y  $c = -1/4$  y siendo  $A(m, n)$  un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de  $m$  y  $n$  para que el área del triángulo rectángulo  $ABC$  sea máxima. (1.5 puntos)

a) Para que pase por  $P$

$$y(0) = 1 \iff a = 1$$

Para que pase por  $Q$

$$y(2) = 0 \iff 4c + 2b + 1 = 0$$

La tangente horizontal en  $P$

$$y'(0) = 0 \iff b = 0$$

Luego

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1/4 \implies y(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$$



b) Dada la curva se tiene que

$$A(m, n) \iff A\left(m, 1 - \frac{1}{4}m^2\right)$$

El área en función de  $m$  ( $m > 0$ ), será

$$f(m) = \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{1}{4}m^2\right)$$

Derivamos para calcular los puntos críticos

$$f'(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}m^2\right)$$

$$f'(m) = 0 \iff m^2 = \frac{4}{3} \xrightarrow{m > 0} m = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547 \implies n = \frac{2}{3} = 0.6666$$

Es máximo, pues

$$f''(m) = -\frac{3}{4}m \implies f''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) < 0$$

**3.** Dados los puntos  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $D(4, 1, 3)$ . Determina:

- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
- b) La recta  $r$  que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano  $\pi$  que contiene los puntos  $A, B, C$ . (1 punto)
- c) El punto de corte de la recta  $r$  con el plano  $\pi$ . (0.75 puntos)

a) Los puntos serán coplanarios si los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  son linealmente dependientes, que se puede comprobar a través del determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \\ \vec{AD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

es decir, los vectores son linealmente independientes, luego **no son coplanarios**.

b) El plano  $\pi$  que contiene los puntos  $A, B, C$  está determinado por un punto  $A$  y los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + y + 3z - 3 = 0$$

La recta  $r$  tendrá como uno de sus vectores directores al vector normal al plano  $\pi$ ,  $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$ . Y su ecuación vectorial será

$$r : (x, y, z) = (4, 1, 3) + \lambda(1, 1, 3) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

O, en las otras formas

$$r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - z = 9 \end{cases} \iff x - 4 = y - 1 = \frac{z - 3}{3}$$



c) El punto de corte se puede calcular resolviendo el sistema formado por el plano y la recta

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 3x - z = 9 \\ x + y + 3z = 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ \iff \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 3y - z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} F_3 = 3F_3 - 2F_2 \\ \iff \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 3y - z = 0 \\ 11z = 0 \end{array} \right.$$

con solución

$$C(3, 0, 0)$$

4. En un asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas la personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70 % de las personas que entran cogen harina y el 40 % los dos productos. Calcula:

- a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)
- b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)
- c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

Denotamos por  $H$  ( $P(H) = 0.7$ ) las personas que cogen harina y por  $L$  las personas que cogen leche.

- a) Si  $H \cup L$  es el total, es decir,  $P(H \cup L) = 1$  y  $P(H \cap L) = 0.4$ , entonces

$$P(L) = P(H \cap L) + P(H \cup L) - P(H) = \mathbf{0.7}$$

- b) Si denotamos por  $1P$  las personas que cogen un solo producto, y todas cogen alguno, se tendrá que este suceso será el contrario a coger los dos productos  $H \cap L$

$$P(1P) = 1 - P(H \cap L) = \mathbf{0.6}$$

- c) Nos piden  $P(H/L)$

$$P(H/L) = \frac{P(H \cap L)}{P(L)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7} = \mathbf{0.5714}$$