Ejercicio 1A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}$.

a) Calcula a y b. (1,25 puntos)

b) Para a = −1 y b = 4, estudia si existe la derivada de f en x = 2. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto. (1,25 puntos)

Solución

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}$.

(a)

Calcula a y b.

Como la función es derivable en R, es continua en R; en particular en continua y derivable en x = 0.

Como f(x) es continua, lo es en x = 0 luego $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+2) = 2$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{(b)}$.

De $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, tenemos $2 = \sqrt{(b)}$, de donde **b = 4**.

Como f(x) es continua, lo es en x = 2 luego $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{ax+4} = \sqrt{(2a+4)}$. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{-x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{(2)}$.

De $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$, tenemos $\sqrt{(2a+4)} = \sqrt{(2)}$, de donde 2a + 4 = 2, luego **a = -1**.

(b)

Para a = −1 y b = 4, estudia si existe la derivada de f en x = 2. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Para que f(x) sea derivable en x = 2 ha de verificarse $f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, veremos la continuidad de la derivada.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{-x+4} & \text{si } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases},\quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{4} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. $f'(2^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$.

Como $f'(2^-) = f'(2^+) = [-\sqrt{(2)}]/4$, f(x) es derivable en x = 2 y $f'(2) = [-\sqrt{(2)}]/4$.

La recta tangente en x = 2 es "y - f(2) = f '(2)(x - 2)", es decir **$y - \sqrt{(2)} = ([-\sqrt{(2)}]/4)\cdot(x - 2)$.**

Ejercicio 2A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Sea la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1 punto)

b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica. (1,5 puntos)

Solución

Sea la función f : R → R definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).

(a)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Me piden la monotonía. Estudio de f '(x)

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$; $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

De $f'(x) = 0$, tenemos $2x = 0$, de donde $x = 0$ que será el posible extremo relativo.

Como $f'(-1) = \dfrac{2(-1)}{(-1)^2+1} = -1 < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-∞,0).**

Como $f'(1) = \dfrac{2(1)}{(1)^2+1} = 1 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (0,+∞).**

Por definición **x = 0 es un máximo relativo y vale f(0) =** $\ln(0^2 + 1)$ **= ln(1) = 0**.

(b)

Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Sabemos que la curvatura es el estudio de la 2ª derivada.

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$; $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$.

De $f''(x) = 0$, tenemos $-2x^2 + 2 = 0 \to x^2 = 1$, de donde $x = \pm 1$ que serán los posibles puntos de inflexión.

Como $f''(-2) = \dfrac{-2(-2)^2+2}{((-2)^2+1)^2} = -6/25 < 0$, **f es cóncava (∩) en (-1, 2) en (-∞, -1).**

Como $f''(0) = \dfrac{-2(0)^2+2}{((0)^2+1)^2} = 2 > 0$**, f es convexa (∪) en (-1, 1).**

Como $f''(3) = \dfrac{-2(2)^2+2}{((2)^2+1)^2} = -6/25 < 0$, **f es cóncava (∩) en (1, +∞).**

Por definición **x = -1 es punto de inflexión y vale f(-1) =** $\ln((-1)^2 + 1)$ **= ln(2) ≅ 0'69.**

Por definición **x = 1 es punto de inflexión y vale f(1) =** $\ln((1)^2 + 1)$ **= ln(2) ≅ 0'69.**

Ejercicio 3A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Considera la función F : [0, 2π] → R definida por $F(x) = \int_0^x 2t\cdot\cos(t)dt$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F. (1 punto)

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = π. (1,5 puntos)

Solución

Considera la función F : [0, 2π] → R definida por $F(x) = \int_0^x 2t\cdot\cos(t)dt$.

(a)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F.

Por el Teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = \left(\int_0^x 2t\cdot\cos(t)dt\right)' = 2x\cdot\cos(x)$

Me piden la monotonía. Estudio de $F'(x) = 2x\cdot\cos(x)$

De $F'(x) = 0$, tenemos $2x = 0$, de donde $x = 0$ que será el posible extremo relativo, *0 es un extremo del intervalo.*

De $f'(x) = 0$ tenemos $\cos(x) = 0$. (Recordamos que el cos(x) era la ordenada en la circunferencia goniométrica, por tanto se anula en x = π/2 y x = 3π/2, por tanto los posibles extremos de la función f tienen de abscisa x = 0, x = π/2, y x = 3π/2.

Como $F'(\pi/4) = 2(\pi/4)\cdot\cos(\pi/4) = 2(\pi/4)\cdot(\sqrt{2})/2 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (0, π/2).**

Como F '(π) = 2(π)·cos(π) = 2(π)·(-1) < 0, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (π/2, 3π/2).**

Como F '(5) = 2(2·5)·cos(5) = 20·(0'28) > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (3π/2, 2π).**

(b)
Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = C. (1,5 puntos)

La recta tangente en x = π es "y - F(π) = F '(π)(x - π)". Sabemos que F '(π) = -2π, nos falta calcular F(π) para lo cual nos falta calcular la integral.

Calculamos primero la integral indefinida: $I = \int 2t\cdot\cos(t)dt$

$$I=\int 2t\cdot\cos(t)dx=\left\{\begin{array}{l} u=2t \quad \Rightarrow du = 2dt \\ dv=\cos(x)dx \quad \Rightarrow v=\int\cos(t)dt=\operatorname{sen}(t)\end{array}\right\} = 2t\cdot\operatorname{sen}(t) - \int 2\operatorname{sen}(t)dt = 2t\cdot\operatorname{sen}(t) - (-2\cos(t) + K =$$

$$= 2t\cdot\operatorname{sen}(t) + 2\cos(t) + K.$$

Luego $F(x) = \int_0^x 2t\cdot\cos(t)dt = \left[2t\cdot\operatorname{sen}(t) + 2\cos(t)\right]_0^x = 2x\cdot\operatorname{sen}(x) + 2\cdot\cos(x) - 0 - 2\cdot\cos(0) =$

$= 2x\cdot\operatorname{sen}(x) + 2\cdot\cos(x) - 2$, por tanto $F(\pi) = 2\pi\cdot\operatorname{sen}(\pi) + 2\cdot\cos(\pi) - 2 = 0 + 2(-1) - 2 = -4$.

La recta tangente en x = π es "y - (-4) = (-2π)(x - π)", es decir y = -2πx + 2π^2 - 4.

Ejercicio 4A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Calcula $\int_0^1 x\cdot\operatorname{artg}(x)dx$. (donde artg denota la función arcotangente)

Solución

Calculamos primero la integral indefinida: $I=\int x\cdot\operatorname{artg}(x)dx$

$$I=\int x\cdot\operatorname{artg}(x)dx = \left\{\begin{array}{l} u=\operatorname{artg}(x) \quad \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx \quad \Rightarrow v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \operatorname{artg}(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) - \frac{1}{2}\cdot I_1$$

$$I_1 = \int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \int\frac{1+x^2-1dx}{1+x^2} = \int\frac{1+x^2dx}{1+x^2} - \int\frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{artg}(x)$$

Luego

$$I = \int x\cdot\operatorname{artg}(x)dx = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) - \frac{1}{2}\cdot I_1 = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) - \frac{1}{2}\cdot(x - \operatorname{artg}(x)) + K = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) - \frac{1}{2}x + K$$

Por Tanto $\int_0^1 x\cdot\operatorname{artg}(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{artg}(x) - \frac{1}{2}x\right]_0^1 =$

=(1/2)·artg(1) + (1/2)·artg(1) - (1/2) - (1/2)·artg(0) - (1/2)·artg(0) + (1/2)**=**

= (1/2)·(π/4) + (1/2)·(π/4) - (1/2) - 0 - 0 + 0 = π/4 - 1/2.

Ejercicio 5B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Álgebra)

Considera el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my - z = -1 \\ 3x + y - 3z = -m \end{array}\right.$.

a) Discute el sistema según los valores de m. (1,75 puntos)
b) Para m = -2 encuentra, si es posible, y_0 para que la solución del sistema sea x = λ, y = y_0, z = λ - 3/7. (0,75 puntos)

Solución

Considera el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my - z = -1 \\ 3x + y - 3z = -m \end{array}\right.$.

(a)

Discute el sistema según los valores de m.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 3 \\ 1 & m & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -m \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} C_3+C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2+m \\ 1 & m & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (2 + m)(1 - 3m).$

Si $|A| = 0$, tenemos $(2 + m)(1 - 3m) = 0$, de donde $m = -2$ y $m = 1/3$.

Si **$m \neq -2$ y $m \neq 1/3$**, $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **m = -2,** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} C_3+C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas iguales, rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas).**

Si **m = 1/3,** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 \\ 3 & 1 & -1/3 \end{vmatrix} C_3+C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 3 & 1 & 8/3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{matrix} = -(1)\cdot(8-5) + (1/3)\cdot(16/3-15) = -3 - 29/9 = 2/9 \neq 0$

, rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

(b)

Para m = -2 encuentra, si es posible, y_0 para que la solución del sistema sea $x = \lambda$, $y = y_0$, $z = \lambda - 3/7$.

Hemos visto en el apartado anterior que si **m = -2**, rango(A) = rango(A^*) = 2, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \; (E_1 - 2E_2) \\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \approx \begin{cases} \quad + 7y = 5 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases}$, de donde $y = 5/7$ y tomando $x = \lambda \in R$, $z = 1 - 10/7 + \lambda = -3/7 + \lambda$.

Solución (x, y, z) = (λ, 5/7, -3/7 + λ) con $\lambda \in R$. **Cierto donde y_0 = 5/7.**

Ejercicio 6B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Álgebra)

Dado $a \neq 0$ considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para que valores de a se cumple que $A^{-1} = (1/4)\cdot A$. (1,25 puntos)

b) Para a = 1 calcula, si es posible, la matriz X tal que AX = B^t, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.
(1,25 puntos)

Solución

Dado $a \neq 0$ considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a)
Determina para que valores de a se cumple que $A^{-1} = (1/4)\cdot A$.

En principio para que exista A^{-1}, su determinante |A| tiene que ser distinto de cero.

$|A|=\begin{vmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a - 3a = -4a$. **Luego si $a \neq 0$ existe A^{-1}.**

Veamos A-1 = $\dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$.

$A^t = \begin{pmatrix} -a & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t)=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}$, $A^{-1}= \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{-4a}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1/a & 3/a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

De $A^{-1} = (1/4)\cdot A \to \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1/a & 3/a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, de donde -1/a = -a; 3/a = 3; 1 = a y 1 = 1.

De $-1/a = -a \to a^2 = 1$, luego $a = \pm 1$.
De $3/a = a \to a = 1$.

Luego para A tenga inversa y verifique $A^{-1} = (1/4)\cdot A$ tiene que verificarse que a = 1.

(b)
Para a = 1 calcula, si es posible, la matriz X tal que AX = B^t, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Para a = 1, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

De AX = B^t, multiplicando por la izquierda por A^{-1} tenemos: $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B^T \to IX = A^{-1}\cdot Bt$, **de donde resulta $X = A^{-1}\cdot B^t$.**

La matriz X pedida es: $X = A^{-1}\cdot B^t$ = $\dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 9 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9/4 & 5/4 \\ 0 & 7/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Geometría)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r. (1,25 puntos)
b) Calcula la distancia entre r y π. (1,25 puntos)

Solución

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

(a)
Determina la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r. (1,25 puntos)

El vector normal del plano π es **n** = (1, 1, 1). Un punto de "r" es A(0, 1, 0), y un vector director es **u** = (1, -1, 0).

Para un plano necesitamos un punto, el A(0,1,0) (contiene a r) y dos vectores independientes el **u** = (1,-1, 0) (contiene a r) y el **n** = (1, 1, 1) (el plano es perpendicular al π).

El plano pedido es: $\pi' \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0 = \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= x(-1-0) - (y+1)(1-0) + (z)(1+1) = 0 =$

$\mathbf{= -x - y + 2z - 1 = 0 = x + y - 2z - 1 = 0.}$

b)
Calcula la distancia entre r y π.

Como el plano π es paralelo a r, $d(r, \pi) = d(A, \pi)$ siendo A un punto cualquiera de la recta, en nuestro caso A(0, 1, 0).

Luego $\mathbf{d(r, \pi) = d(A, \pi) =} \dfrac{|(0) + (1) + (0)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$ $\mathbf{= 1/\sqrt{3}\ u^1 \cong 0'57735\ u^1.}$

Ejercicio 8B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Geometría)

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{5}$.

a) Halla los puntos de r que equidistan de π_1 y π_2. (2 puntos)
b) Halla el seno del ángulo que forma el plano π_1 con la recta r. (0,5 puntos)

Solución

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{5}$.

(a)
Halla los puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

Ponemos la recta r en forma vectorial es "r" $\equiv (x, y, z) = (1 + m, 2m, -1 + 5m)$.

Un punto genérico de la recta "r" es $X = (1 + m, 2m, -1 + 5m)$.

Como me piden los puntos de "r" que equidistan de π_1 y π_2, tengo que resolver la ecuación: $d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2)$, con X punto genérico de "r".

$$d(X, \pi_1) = \frac{|2\cdot(1 + m) + (2m) + (-1 + 5m) - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|9m - 2|}{\sqrt{6}}.$$

$$d(X, \pi_2) = \frac{|(1 + m) + 2\cdot(2m) - (-1 + 5m) + 5|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{6}}.$$

Igualando tenemos $\dfrac{|9m - 2|}{\sqrt{6}} = \dfrac{|7|}{\sqrt{6}}$, es decir $|9m - 2| = |7|$, de donde salen dos ecuaciones:

$(9m - 2) = +(7)$, de donde $9m = 9$, es decir $m = 1$ y un punto de la recta que equidista de ambos planos es $X_1(1 + (1), 2(1), -1 + 5(1)) = \mathbf{X_1(2, 2, 4).}$

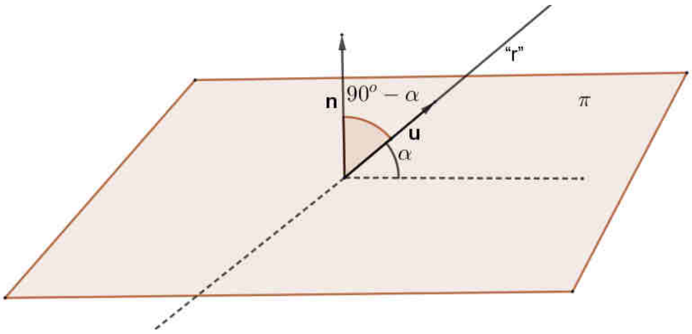
$(9m - 2) = -(7)$, de donde $9m = -5$, es decir $m = -5/9$ y el otro punto de la recta que equidista de ambos planos es $X_2(1 + (-5/9), 2(-5/9), -1 + 5(-5/9)) = \mathbf{X_2(4/9, -10/9, -34/9).}$

(b)
Halla el seno del ángulo que forma el plano π_1 con la recta r.

Dada la recta r(A,**u**) y el plano π(**n**) se define el *ángulo que forma la recta "r" con el plano π* como el menor de los ángulos que forma la recta "r" con la recta " r' ", proyección de "r" sobre el plano

Se observa que el ángulo que forma la recta "r" con el plano π coincide con el complementario del menor de los ángulos que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano con un origen común, es decir $\cos(<r,\pi>) = |\cos(\alpha)|$, ahora bien como $\text{sen}(\alpha) = \cos(90^o - \alpha)$. Tomando el valor absoluto del seno nos aseguramos de que el ángulo es el menor y no supera lo 90º sexagesimales.

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(<r,\pi>) = \cos(90^o-\alpha) = |\cos(<\mathbf{u},\mathbf{n}>)| = \left|\frac{\vec{u}\bullet\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}\right|.$$



El vector director de la recta "r", el **u** = (1, 2, 5). El vector normal del plano π_1 es **n** = (2, 1, 1)
u•n = 2 + 2 + 5 = 9; **||u||** = $\sqrt{(1^2 + 2^2 + 5^2)} = \sqrt{(30)}$; **||n||** = $\sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{(6)} = 3$, luego:

sen(α) = sen(<r,π>) = cos(90º-α) = |cos(<**u**, **n**>)| **=** $\left|\frac{9}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{6}}\right| \cong$ **0'67082039**.