Ejercicio 1A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Análisis)

Sea la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2. (1'5 puntos)
b) Para a = 2 y b = -1, estudia la derivabilidad de f. (1 punto)

Solución

Sea la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

(a)
Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2.

Como f(x) es continua, lo es en x = 0 luego $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = 1/(-1) = -1$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} = b/1^2 = b$.

De $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, tenemos -1 = b, de donde **b = -1**.

Como f(x) f tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2, f '(2) = 0.

Vemos que x = 2 está en la rama $f(x)=\dfrac{ax-1}{(x+1)^2}$, luego $f'(x)=\dfrac{a\cdot(x+1)^2 - 2\cdot(x+1)\cdot 1\cdot(ax-1)}{(x+1)^2}$

De f '(2) = 0 → $0 = \dfrac{a\cdot(2+1)^2 - 2\cdot(2+1)\cdot 1\cdot(2a-1)}{(x+1)^4}$ → 0 = 9a - 12a + 6 → 3a = 6, luego **a = 2**.

(b)
Para a = 2 y b = -1, estudia la derivabilidad de f.

Hemos visto que para a = 2 y b = -1, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{2x-1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en R. Ahora nos piden estudiar la derivabilidad, y sol0 falta ver la derivada en x = 0, es decir si f '(0-) = f '(0+)

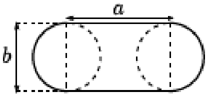
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{2x-1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x\cdot(x-1) - 1\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2\cdot(x+1)^2 - 2\cdot(x+1)\cdot 1\cdot(2x-1)}{(x+1)^4} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-2x^2+2x+4}{(x+1)^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} = 1/1 = 1$. $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-2x^2+2x+4}{(x+1)^4} = 4/1 = 4$.

Como f '(0-) = 1 ≠ f '(0+) = 4, f(x) no es derivable en x = 0 luego es derivable en R – {0}.

Ejercicio 2A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Análisis)

Se quiere cercar un trozo de terreno como el de la figura, de modo que el área del recinto central rectangular sea de $200/\pi$ metros cuadrados. Sabiendo que el coste de la cerca que se puede poner en los tramos rectos es de 10 euros por metro lineal, y en los tramos circulares de 20 euros por metro lineal, calcula las dimensiones a y b del terreno para las que se minimiza el coste del cercado.



Solución

Es un problema de optimización.

Sabemos que la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, en nuestro caso el radio es b/2 y la longitud de la circunferencia sería $2\pi(b/2) = \pi b$.

La función a optimizar es el coste C(a, b) = tramo recto + tramo curco = $2a\cdot 10 + \pi b\cdot 20 = 20a + 20\pi b$.

Relación entre las variables = área del recinto central rectangular sea de $200/\pi$ metros cuadrados, es decir $a\cdot b = 200/\pi \rightarrow b = 200/(a\pi)$.

Luego la función a optimizar es coste $C(a) = 20a + 20\pi\cdot(200/(a\pi)) = 20a + 4000/a$.

Sabemos que si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de C(a).

Derivando tenemos: $C'(a) = 20 - 4000/a^2 = 20 - 4000\cdot a^{-2}$.

De C '(a) = 0 tenemos: $4000/a^2 = 20 \rightarrow a^2 = 4000/20 = 200$, de donde $a = \pm\sqrt{(200)}$. Como "a" es una longitud, no puede ser negativa, luego $a = +\sqrt{(200)}$ metros.

Veamos que es un mínimo.

De $C''(a) = -4000\cdot(-2)\cdot a^{-2-1} + 0 + 0 = 8000\cdot a^{-3} = \frac{8000}{a^3}$, tenemos $C''\left(+\sqrt{200}\right) = \frac{8000}{\left(\sqrt{200}\right)^3} > 0$, con lo cual

$a = +\sqrt{(200)}$ es un mínimo.

Las dimensiones son a = +√(200) ≅ 14'14 metros y $b = \frac{200}{\sqrt{200\cdot\pi}}$ **= √(200)/π ≅ 4'5 metros.**

Ejercicio 3A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Análisis)

Considera la función f : R → R definida por $f(x) = e^x\cdot sen(2x)$. Halla la primitiva de f cuya grafica pase por el punto (0, 0).

Solución

$$F(x)=I=\int e^x\cdot sen(2x)dx = \left\{\begin{matrix} u=e^x & \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=sen(2x)dx & \Rightarrow v=\int sen(2x)dx= -cos(2x)/2 \end{matrix}\right\} = -e^x\cdot cos(2x)/2 - \int -e^x\cdot cos(2x)/2dx =$$

$$= -e^x\cdot cos(2x)/2 + I_1.$$

$$I_1 = \int e^x\cdot cos(2x)/2dx = \left\{\begin{matrix} u=e^x & \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=cos(2x)/2dx & \Rightarrow v=\int cos(2x)/2dx= sen(2x)/4 \end{matrix}\right\} = e^x\cdot sen(2x)/4 - \int e^x\cdot sen(2x)/4dx =$$

$$= e^x\cdot sen(2x)/4 - I/4$$

Luego $I = -e^x\cdot cos(2x)/2 + I_1 = -e^x\cdot cos(2x)/2 + (e^x\cdot sen(2x)/4 - I/4) = (1/4)\cdot(-2\cdot e^x\cdot cos(2x) + e^x\cdot sen(2x) - I)$

$\Rightarrow 4\cdot I = -2\cdot e^x\cdot cos(2x) + e^x\cdot sen(2x) - I \Rightarrow 4I = -2\cdot e^x\cdot cos(2x) + e^x\cdot sen(2x) - I$

$\Rightarrow 5\cdot I = -2e^x\cdot cos(2x) + e^x\cdot sen(2x) \Rightarrow F(x)=\int e^x\cdot sen(2x)dx = \frac{-2e^x\cdot cos(2x) + e^x\cdot sen(2x)}{5} + K$

Como $F(0) = 0 \rightarrow 0 = (1/5)\cdot(-2e^0\cdot cos(0) + e^0\cdot sen(0)) + K \rightarrow 0 = (-2/5) + K$, **es decir K = 2/5 y la primitiva pedida es** $\mathbf{F(x) = (1/5)\cdot(-2e^x\cdot cos(2x) + e^x\cdot sen(2x)) + 2/5 = (1/5)\cdot(-2e^x\cdot cos(2x) + e^x\cdot sen(2x) + 2)}$

Ejercicio 4A del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Análisis)

Considera las funciones f, g : R → R definidas por $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que delimitan. (1,25 puntos)

b) Determina el área del recinto anterior. (1,25 puntos)

Solución

Considera las funciones f, g : R → R definidas por $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

(a)

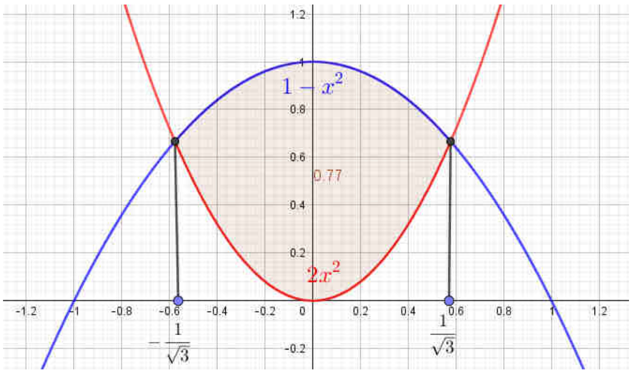
Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que delimitan.

La gráfica de $f(x) = 1 - x^2$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (∩) porque el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0 = -2x$, de donde x = 0 y el vértice es V(0,f(0)) = = (0,1). Además pasa por los puntos (1, f(1)) = (1,0) y (-1, f(-1)) = (-1, 0).

La gráfica de $g(x) = 2x^2$ es la de una parábola con las ramas hacia arriba (∪) porque el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en la solución de $g'(x) = 0 = 4x$, de donde $x = 0$ y el vértice es $V(0,g(0)) =$
$= (0, 0)$. Además pasa por los puntos $(-1, g(-1)) = (-1, 2)$ y $(1, g(1)) = (1, 2)$.

Los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir $1 - x^2 = 2x^2$. Tenemos $1 = 3x^2$, de donde $x^2 = 1/3$ con soluciones $x = \pm 1/\sqrt{3}$ (serán los límites de integración), por tanto los puntos de corte de ambas curvas son $(-1/\sqrt{3}, 2/3)$ y $(+1/\sqrt{3}, 2/3)$.

Un esbozo de las gráficas es



(b)
Determina el área del recinto anterior.

Sabemos que el área encerrada por dos funciones es la integral de la resta de ambas funciones, entre las abscisas de sus puntos de corte, en nuestro caso la gráfica es simétrica:

$$\text{Área} = 2\cdot\int_0^{1/\sqrt{3}} (f(x) - g(x))\,dx = 2\cdot\int_0^{1/\sqrt{3}} (1 - x^2 - 2x^2)\,dx = 2\cdot\int_0^{1/\sqrt{3}} (1 - 3x^2)\,dx = 2\cdot\left[x - x^3 \right]_0^{1/\sqrt{3}} =$$

$$= 2\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 0\right] u^2 = 2\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right] u^2 = 2\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\right] u^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9} u^2 \cong 0'7698\ u^2.$$

Ejercicio 5B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Álgebra)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^{-1}. (1 punto)
b) Calcula la matriz X de orden tres que verifica $AX + (A - X)^2 = X^2 + I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. (1,5 puntos)

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a)
Calcula A^{-1}.

Calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2+C_1 = \\ C_3+C_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(6 - 4) = 2 \neq 0$, luego existe la matriz inversa

$A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(b)
Calcula la matriz X de orden tres que verifica $AX + (A - X)^2 = X^2 + I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

Tenemos $AX + (A - X)^2 = X^2 + I \rightarrow AX + A^2 - AX - XA + X^2 = X^2 + I \rightarrow A^2 - XA = I \rightarrow XA = A^2 - I$.
Multiplicando la $XA = A^2 - I$ por la derecha por la matriz $A^{-1} \rightarrow XA\cdot A^{-1} = A^2\cdot A^{-1} - I\cdot A^{-1} \rightarrow X\cdot I = A\cdot I - A^{-1} \rightarrow$

$\rightarrow$ **X = A - A^{-1}.**

Por tanto **X = A - A^{-1} =** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$**.**

Ejercicio 6B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Álgebra)

En un estudio del ciclo del sueño se monitoriza la fase NO-REM (es el momento del sueño que el cuerpo utiliza para descansar físicamente). Esta fase se divide a su vez en tres momentos: Fase I (adormecimiento), Fase II (sueño ligero) y Fase III (sueño profundo). Una persona dedica el 75% de su sueño a la fase NO-REM. Además, el tiempo que dedica a la Fase II es el doble que el de la Fase I y III juntas. Por otro lado, a la Fase III se dedica el cuádruple que a la Fase I. Si una persona ha dormido 8 horas, ¿cuantos minutos dedica a las Fases I, II y III del ciclo del sueño?

Solución

Sea:
x = número de minutos que dedica a dormir en la Fase I,
y = número de minutos que dedica a dormir en la Fase II,
z = número de minutos que dedica a dormir en la Fase III.

De, "Una persona dedica el 75% de su sueño a la fase NO-REM y si una persona ha dormido 8 horas, duerme 8x0'75 = 6 horas = 360 minutos" $\rightarrow$ x + y + z = 360.
De, "el tiempo que dedica a la Fase II es el doble que el de la Fase I y III juntas" $\rightarrow$ y = 2(x + z).
De, "a la Fase III se dedica el cuádruple que a la Fase I" $\rightarrow$ z = 4x.

Vamos a intentar resolverlo por el método de Gauss.

$\begin{cases} x + y + z = 360 \\ y = 2(x+z) \\ z = 4x \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + 4x = 360 \\ y = 2(x+4x) = 10x \\ z = 4x \end{cases}$, de x + 10x + 4x = 360 $\rightarrow$ 15x = 360, **luego x = 24, y = 240 y z = 96, es decir duerme 24 minutos en la Fase I, 240 minutos en la Fase II y 96 minutos en la Fase III.**

Ejercicio 7B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Geometría)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. (1,5 puntos)
b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a s. (1 punto)

Solución

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

(a)
Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Ponemos ambas recta en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = m \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \ (E_2+E_1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x \quad = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = n \end{cases}$ con m y n números reales.

Un punto de r es A(0, 0, 0) y un vector director **u** = (0, 1, 0). De la recta s tenemos el punto B(1, 0, 0) y el vector director **v** = (0, 0, 1).

Para un plano π necesitamos un punto, el A(0, 0, 0) (el plano contiene a "r"), y dos vectores independientes, uno el **u** = (0, 1, 0) (esto es porque el plano contiene a "r"), y el otro vector es el **v** = (0, 0, 1) (al ser paralelo a la recta "s").

La ecuación general de $\pi \equiv$ det(AX,u,v) = 0 = $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix}$ = (x)(1 - 0) - (y)(0 - 0) + (z)(0 - 0) **= x = 0.**

(b)
Determina la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a s.

Como los vectores **u** y **v** no son proporcionales las rectas se cortas o se cruzan. AB = (1, 0, 0).

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 ≠ 0 **las rectas se cruzan.**

Existirá un plano π' que contiene a r y es perpendicular a s, solamente si las rectas son perpendiculares es decir su producto escalar es cero.

Como **u•v** = (0, 1, 0)•(0, 0, 1) = 0 las rectas son perpendiculares.

El plano pedido π' tiene vector normal **n'** el director de s, **n'** = **v** = (0, 0, 1) y un punto de r el A(0, 0, 0).

Plano **π' ≡ AX•v = 0 =** (x, y, z)•(0, 0, 1) **= z = 0**

Ejercicio 8B del Modelo 2 (Ordinario Reserva) de 2022 (Geometría)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x + y + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv x - z - 1 = 0$, así como la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2. (1,5 puntos)
b) Halla el ángulo que forman los planos π_1 y π_2. (1 punto)

Solución

Considera los planos $\pi_1 \equiv x + y + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv x - z - 1 = 0$, así como la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

(a)
Calcula los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

Tomando x = m ∈ R, la recta r en forma vectorial es "r" ≡ (x, y, z) = (m, 1, 1 - 2m).

Un punto genérico de la recta "r" es X = (m, 1, 1 - 2m).

Como me piden los puntos de "r" que equidistan de π_1 y π_2, tengo que resolver la ecuación:
$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2)$, con X punto genérico de "r".

$d(X, \pi_1) = \frac{|(m) + (1) + 2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|m + 3|}{\sqrt{2}}$. $d(X, \pi_2) = \frac{|(m) - (1 - 2m) - 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{|3m - 2|}{\sqrt{2}}$

Igualando tenemos $\frac{|m + 3\ |}{\sqrt{2}} = \frac{|3m - 2|}{\sqrt{2}}$, es decir |m + 3| = |3m - 2|, de donde salen dos ecuaciones:
(m + 3) = +(3m - 2), de donde 5 = 2m, es decir m = 5/2 y un punto de la recta que equidista de ambos planos es X_1((5/2), 1, 1 - 2(5/2)) = **X_1(5/2, 1, -4).**

(m + 3) = -(3m - 2), de donde 4m = -1, es decir m = -1/4 y el otro punto de la recta que equidista de ambos planos es X_2((-1/4), 1, 1 - 2(-1/4)) = **X_2(-1/4, 1, 3/2).**
(b)
Halla el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Sabemos que el *ángulo que forman dos planos* π(**n**) y π'(**n'**) es el menor de los ángulos que determinan sus diedros, el cual coincide con el menor de los ángulos que forman sus vectores normales con un origen común, es decir cos(<π, π'>) = |cos(<**n**, **n'**>)|

De π ≡ x + y + 2 = 0, tenemos **n** = (1, 1, 0). De π' ≡ x - z - 1 = 0, tenemos **n'** = (1, 0, -1)

$\cos(\alpha) = \cos(<\pi,\pi'>) = |\cos(<n,n'>)| = \left| \frac{\vec{n} \bullet \vec{n'}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{n'}\|} \right|$ = 1/((√(2))^2 = 1/2, por tanto **el ángulo que forman los planos es α = arcos(1/2) = 60º.**
n•n' = 1 + 0 - 0 = 1 → **| n•n'** |= |1| = 1; ||**n**|| = √($1^2 + 1^2 + 0^2$) = √(2); ||**n'**|| = √($1^2 + 0^2 + 1^2$) = √(2)