## Ejercicio 1A Julio (mod 4) 2022 (Análisis)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(\ln(x))^3 + 2x} = 1$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).

**Solución**

La regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos $\infty/\infty$, y si $x\to\infty$.

$$\text{Tenemos } 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(\ln(x))^3 + 2x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3\cdot(\ln(x))^2\cdot\frac{1}{x} + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\cdot x}{3\cdot(\ln(x))^2 + 2x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{6\cdot(\ln(x))\cdot\frac{1}{x} + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{6\cdot(\ln(x)) + 2x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\frac{6}{x} + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{6 + 2x} = \left\{\frac{+\infty}{+6 + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

, de donde $1 = a/2$ **y por tanto a = 2.**

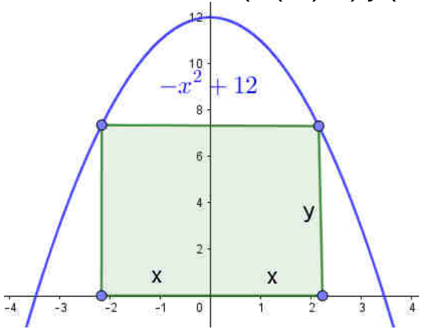
## Ejercicio 2A Julio (mod 4) 2022 (Análisis)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

**Solución**

Es un problema de optimización.

Un pequeño esbozo de la gráfica nos ayudará: $f(x) = -x^2 + 12$ es una parábola parecida con las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a $x^2$ es negativo. Abscisa del vértice es la solución de $f'(x) = 0 = -2x$, de donde $x = 0$ y $f(0) = 12$, luego el vértice en $(0, 12)$, y corte con OX $\to$ $f(x) = 0 = -x^2 + 12 \to x^2 = 12 \to$ $\to x = \pm\sqrt{(12)} = \pm$ 3'46, y los puntos de corte son con OX $(-\sqrt{(12)}, 0)$ y $(+\sqrt{(12)}, 0)$.




Función a optimizar Área = (2x).y
Relación entre las variables $y = - x^2 + 12$.
Función a optimizar $A(x) = (2x)\cdot(- x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$.

Recordamos que si $A'(a) = 0$ y $A''(a) < 0$, en $x = a$ hay un máximo relativo.
$A(x) = -2x^3 + 24x$; $A'(x) = -6x^2 + 24$.

De $A'(x) = 0$, tenemos $0 = -6x^2 + 24 \to x^2 = 4$ y sus soluciones son $x = \pm\sqrt{(4)} = \pm2$. Como son longitudes la única solución válida es $x = +2$, que será el posible máximo.

$A'(x) = -6x^2 + 24$. $A''(x) = -12x$.

Como $A''(+2) = -12\cdot2 = -24 < 0$, luego $x = +2$ es un máximo.

Los **vértices del rectángulo son (-2, 0), (-2, $-(-2)^2 + 12$) = (-2, 8), (2, $-(2)^2 + 12$) = (2, 8) y (2, 0).**

**El área del rectángulo es $A(2) = -2(2)^3 + 24(2)\ u^2 = 32\ u^2$.**

## Ejercicio 3A Julio (mod 4) 2022 (Análisis)

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio $t = \sqrt{1+x} - 1$.)

### Solución

$$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio } t = \sqrt{1+x} - 1;\ \sqrt{1+x} = 1+t.\ \text{Si } x = 3 \rightarrow t = 1 \\ x+1 = (1+t)^2;\ dx = 2(1+t)dt.\ \text{Si } x = 8 \rightarrow t = 2 \end{array} \right\} = \int_1^2 \frac{2(1+t)}{t}dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} + 2\right)dt =$$

$$= \left[2\cdot \ln|t| + 2t\right]_1^2 = (2\cdot\ln(2) + 4) - (2\cdot\ln(1) + 2) = \mathbf{2\cdot\ln(2) + 2.}$$

## Ejercicio 4A Julio (mod 4) 2022 (Análisis)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.
a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas. (1'25 puntos)
b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante. (1'25 puntos)

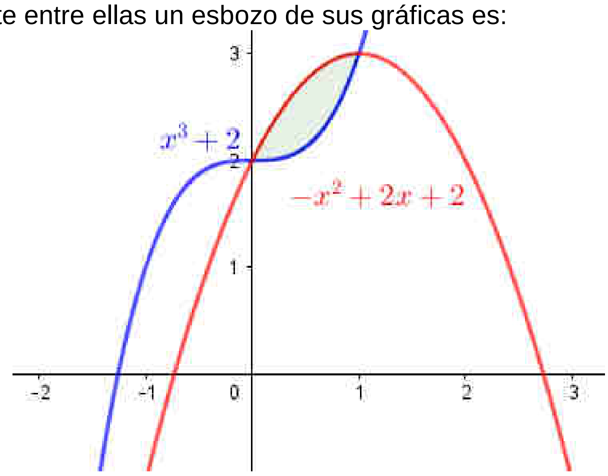
### Solución

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.
(a)
Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

Corte entre ellas:
De $f(x) = g(x) \rightarrow x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 = x\cdot(x^2 + x - 2)$ de donde $x = 0$ y $x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, de donde $x = -2$ y $x = 1$. Los puntos de corte son $(-2, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 4)$.
La gráfica de $f(x) = x^3 + 2$ es exactamente igual que la de $f(x) = x^3 + 2$ pero desplazada dos unidades hacia arriba en ordenadas, es decir en $-\infty$ vale $-\infty$, en $+\infty$ vale $+\infty$, estrictamente creciente, para $x = 0$ punto $(0, 2)$, para $f(x) = 0 \rightarrow x^3 = -2$, de donde $x = -\sqrt[3]{2} \cong -1'26$ y punto $(-1'26, 0)$.

La gráfica de $g(x) = -x^2 + 2x + 2$ es la de una parábola así ($\cap$) porque el nº que multiplica a $x^2$ es negativo.
La abscisa de su vértice es la solución de $g'(x) = 0 = -2x + 2$, de donde $x = 1$ y su vértice es el punto $V(1, g(1)) = V(1, 3)$.

Como ya hemos visto el corte entre ellas un esbozo de sus gráficas es:




(b)
Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

Como me piden el área entre ellas, en el primer cuadrante:

$$\textbf{Área} = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 2 - (x^3 + 2))dx = \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = (-1/4 - 1/3 + 1) - (0)\ u^2 = \mathbf{5/12\ u^2.}$$

## Ejercicio 5B Julio (mod 4) 2022 (Algebra)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa. (0'5 puntos)
b) Para a = 1 calcula X tal que AXB = C, si es posible. (2 puntos)

### Solución

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a)
Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

Sabemos que la matriz B no tiene inversa si det(B) = |B| = 0.

Calculamos $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2 - C_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = +(a-2)\cdot(2a-0) = +2a\cdot(a-2) = 0$, luego **no existe la matriz inversa de B si a = 0 y a = 2.**

(b)
Para a = 1 calcula X tal que AXB = C, si es posible.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, existe $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Como para a = 1, $|B| = +2(1)\cdot((1)-2) = -2 \neq 0$ existe $B^{-1} = \dfrac{Adj(B)^t}{|B|}$. $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \dfrac{Adj(B)^t}{|B|} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión AXB = C por la izquierda por la matriz $A^{-1}$ y por la derecha por la matriz $B^{-1} \rightarrow$
$\rightarrow A^{-1}\cdot AXB\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \rightarrow I\cdot X\cdot I = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}}$**.**

Por tanto $\mathbf{X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -20 & 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$**.**

## Ejercicio 6B Julio (mod 4) 2022 (Algebra)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$. (1 punto) b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$. (1'5 puntos)

### Solución

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2.$

(a)

Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$.

Tenemos $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = (i) = (-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ -3p & -3q & -3r \end{vmatrix} = (ii) = (-1)\cdot(2)\cdot(-3)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = (i) = (-1)\cdot(6)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

**$= (-6)\cdot(-2) = 12$**

(b)

Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$.

Tenemos

$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = (iii) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a-3p & b-3q & c-3r \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix} = (iv) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix} (v) + \begin{vmatrix} x & y & z \\ -3p & -3q & -3r \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix} = (i) = 0 + (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -3p & -3q & -3r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (ii) =$

$= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\begin{vmatrix} a & b & a \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **$= (-6)\cdot(-2) = 12.$**

Propiedades usadas:

(i) Si en un determinante cambiamos entre si dos filas (dos columnas) el determinante cambia de signo.

(ii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iii) Sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$.

(iv) Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.

(v) Si una fila (columna) de un determinante es proporcional a otra fila (columna) el determinante es cero.

## Ejercicio 7 Julio (mod 4) 2022 (Geometría)

Considera las rectas $r \equiv x + 1 = y - a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$.

a) Calcula a para que r y s se corten. Determina el punto de corte. (1'5 puntos)

b) Halla la ecuación del plano que pasa por P(8, -7, 2) y contiene a la recta s. (1 punto)

**Solución**

Considera las rectas $r \equiv x + 1 = y - a = z/(-1)$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$.

(a)

Calcula a para que r y s se corten. Determina el punto de corte.

De la recta r un punto es A(-1, a, 0) y un vector director es **u** = (1, 1, -1).

De la recta s un punto es B(5, -3, 2) y un vector director es **v** = (2, 0, -1).

Como los vectores **u** = (1, 1, -1) y **v** = (2, 0, -1) no son proporcionales, las rectas r **y s no son paralelas** y tenemos que estudiar el determinante det(**AB**, **u**, **v**). Si es cero se cortan y si es distinto de cero se cruzan

Como **AB** = (6, -3-a, 2), resulta det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 6 & -3-a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} C_1+2C_3 = \begin{vmatrix} 10 & -3-a & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila =

= +(-1)·(10 - 3 - a) = -7 +a.

**Si a = 7,** det(**AB**, **u**, **v**) **= 0 y las rectas r y s se cortan.**

Para calcular el punto de corte de r y s, ponemos ambas recta en paramétricas con parámetro distinto e igualamos: x = x, y = y, z = z para obtener los parámetros y el punto.

Tenemos en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = -1 + m \\ y = 7 + m \\ z = \ \ - m \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2n \\ y = -3 \\ z = 2 - n \end{cases}$ con m, n $\in$ R.

Igualando x = x, y = y, z = z, $\begin{cases} -1 + m = 5 + 2n \\ 7 + m = -3 \\ \ \ - m = 2 - n \end{cases}$. De la segunda ecuación m = -10, entrando en la tercera tenemos 10 = 2 – n, de donde n = -8. Comprobamos que verifica la primera -1 + (-10) = 5+ 2(-8).

**El punto de corte de r y s para es M(-1 + (-10), 7 + (-10), -(-10)) = M(-11, -3, 10).**

(b)

Halla la ecuación del plano que pasa por P(8, -7, 2) y contiene a la recta s. (1 punto)

Para un plano necesitamos un punto, el P(8, -7, 2) y dos vectores independientes, el **v** = (2, 0, -1) y el **BP** = = (3, -4, 0)

La ecuación general del plano pedida es det(**PX, BP, v**) = 0, siendo X(x, y, z) un punto genérico del plano.

$\pi \equiv$ det(**PX, BP, v**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-8 & y+7 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = (x-8)(0-4) - (y+7)(0+3) + (z-2)(-8-0) =

**= -4x - 3y - 8z + 27 = 0 = 4x + 3y + 8z - 27 = 0.**

## Ejercicio 8 Julio (mod 4) 2021 (*Geometría*)

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de r y $\pi$. (0’75 puntos)
b) Dado el punto Q(2, 6, 3), halla su simétrico respecto del plano $\pi$. (1’75 puntos)

### Solución

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

(a)

Calcula, si existe, el punto de intersección de r y $\pi$.

Ponemos la recta “r” en forma vectorial con un parámetro $\lambda$, la sustituimos en el plano $\pi$, obtenemos el valor de $\lambda$, y después el punto de intersección P.

La recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$ en vectorial es $r \equiv (x, y, z) = (\lambda, 3\lambda, 1+\lambda)$

P es la intersección de “r” y “$\pi$”. Sustituimos “r” en “$\pi$” $\rightarrow$ ($\lambda$) + (3$\lambda$) - (1 + $\lambda$) = 2, de donde 3$\lambda$ = 3, por tanto $\lambda$ = 1, y **el punto de corte pedido es P((1), 3(1), 1+(1) ) = P(1, 3, 2).**

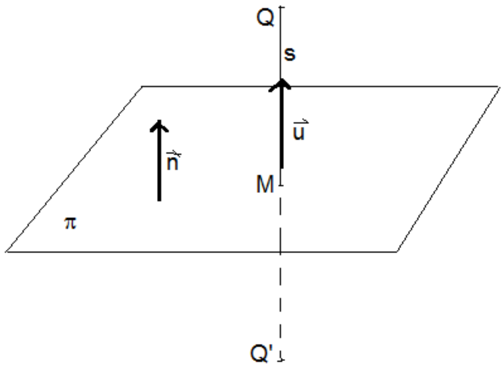
(b)

Halla el punto simétrico del punto Q(2, 6, 3) respecto del plano $\pi$.

Calculamos la recta “s” perpendicular al plano “$\pi$” (Nos sirve como vector director de la recta **u** el vector normal del plano **n**), que pasa por el punto Q.

Calculamos el punto M intercesión de la recta “s” con el plano “$\pi$”.

El punto M es el punto medio del segmento QQ’, siendo Q’ el punto simétrico buscado.




Calculamos la recta “s”. Punto el Q(2, 6, 3), vector director **u** = **n** = (1, 1, -1).

Ecuación de “s” en vectorial s ≡ (x, y, z) = (2 + λ, 6 + λ, 3 - λ) con λ ∈ R.

Punto M = r ∩ π (punto de corte)

De (2 + λ) + (6 + λ) - (3 - λ) = 2, obtenemos 3λ = -3, de donde λ = -1, y el punto M es
M(2 + (-1)), 6 + (-1), 3 - (-1)) = M(1, 5, 4)

El punto M(1, 5, 3) es el punto medio del segmento QQ’, es decir (1, 5, 4) = ( (2+x)/2, (6+y)/2, (3+z)/2).

De 1 = (2+x)/2, tenemos x = 0.
De 5 = (6+y)/2, tenemos y = 4.
De 4 = (3+z)/2 , tenemos z = 5

**El punto simétrico pedido es Q’(x, y, z) = Q’(0, 4, 5).**