EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula a y b. **(1 punto)**

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1,5 puntos)**

a) Al tratarse de una función continua, los límites laterales cuando x tiende a -1 y +1 deben de ser los mismos. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1 \\ \lim_{x\to -1^+} ax+b = -a+b \end{array}\right\}$$ Como $f(x)$ es contínua en $x=-1$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$; Luego: $-a+b=-1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} ax+b = a+b \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$ Como $f(x)$ es contínua en $x=1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$; Luego: $a+b=1/2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a-b=1 \\ 2a+2b=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a-\cancel{2b}=2 \\ 2a+\cancel{2b}=1 \end{array}\right\}$$

$$4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$b = a-1 = \frac{3}{4} - 1 = \frac{-1}{4}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$, los valores de a y b son $3/4$ y $-1/4$, respectivamente.

b) Sabemos que la función es continua en $\mathbb{R}$, el dominio será $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

Las asíntotas verticales se estudian con los límites cuando x tiende a valores nulos del dominio. Al no existir dichos valores, no existirán asíntotas verticales.

Las asíntotas horizontales se determinan cuando el valor de x tiende a extremos infinitos, luego:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ Aplicamos la regla de L'Hôpital, donde se deriva el numerador y denominador de forma independiente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty.$$

Luego, existe asíntota horizontal en $y=0$ para $(-\infty,-1)$.

Por último, las asíntotas verticales obedecen la ecuación de la recta $y=mx+n$, obtenida de la división de polinomios:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x-1 \\ \quad +x+1 & \\ \hline \qquad 1 & \end{array}$$

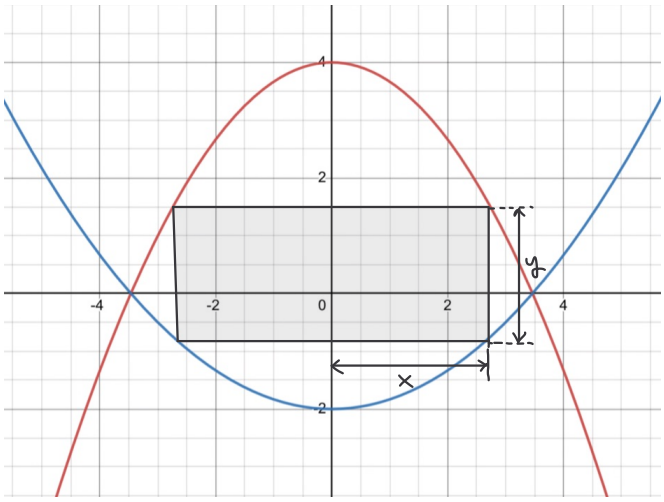
Luego, existe asíntota oblicua para $x\to\infty$ cuya ecuación es $y=x-1$. Cuando $x\to-\infty$ no posee asíntota oblicua debido a que existe horizontal.

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=4-\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=\frac{x^2}{6}-2$.

Representaremos las funciones a partir de una tabla de valores, donde:

x	$f(x)$	$g(x)$
-3	1	$-1/2$
-2	$8/3$	$-4/3$
-1	$11/3$	$-11/6$
0	4	-2
1	$11/3$	$-11/6$
2	$8/3$	$-4/3$
3	1	$-1/2$



El área del rectángulo viene dada por:

$$A_r = \text{base}\cdot\text{altura} \Rightarrow A_r = 2x\cdot y$$

La altura viene dada por la diferencia de $f(x)$ y $g(x)$, siendo:

$$y=\left(4-\frac{x^2}{3}\right)-\left(\frac{x^2}{6}-2\right)=4-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{6}+2 \longrightarrow y=6-\frac{1}{2}x^2$$

Por tanto:

$$A=2x\cdot\left(6-\frac{1}{2}x^2\right) \rightarrow A_{máx}=12x-x^3$$

$$A'_{máx}=12-3x^2=0 \rightarrow -3x^2=-12$$

$$x^2=4$$

$x=\pm 2$; donde la solución $x=-2$ es un resultado aberrante al no existir medidas negativas.

Comprobamos que se trata de un máximo con la segunda derivada.

$$A''_{máx} = -6x = -6\cdot(2) = -12 < 0 \text{ ; luego es un máximo.}$$

Las dimensiones del rectángulo máximo será:

$$x = 2$$
$$y = 6 - \frac{1}{2}x^2 = 6 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 6 - 2 = 4$$

Altura = 4 u

Base = 4 u

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

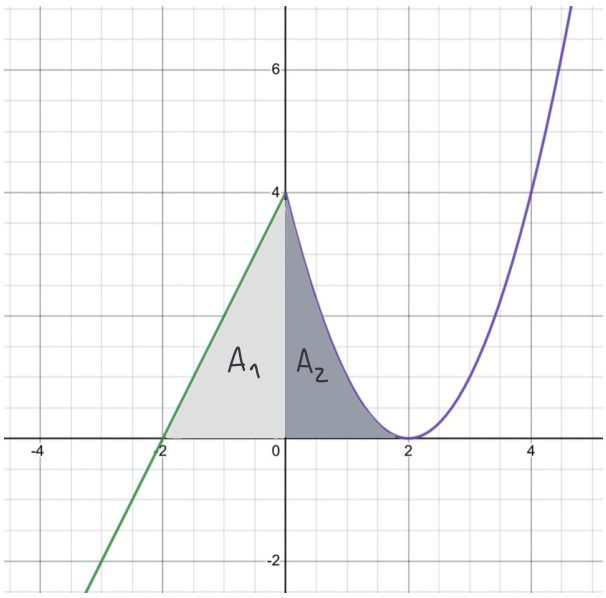
a) Al tratarse de una función polinómica, $Dom f(x) = \mathbb{R}$.
Determinamos los puntos de corte con los ejes:

Eje OX: $y = 0$

$0 = 2x + 4 \rightarrow 2x = -4;\ x = -2 \rightarrow (-2,0)$
$0 = (x-2)^2 \rightarrow x - 2 = 0;\ x = 2 \rightarrow (2,0)$

Eje OY: $x = 0$
$y = 2\cdot 0 + 4 \rightarrow (0,4)$
$y = (0-2)^2 \rightarrow (0,4)$

Por tanto, la función será:



b) El área viene determinado por:

$$A_T = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2\,dx$$

Luego:

$$A = \left(x^2 + 4x\right)\Big]_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big]_{0}^{2}$$

Aplicando la Regla de Barrow:

$$A = (0+0) - \left((-2)^2 - 4\cdot 2\right) + \left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2\right) - (0)$$

$$A = \frac{20}{3}\ u^2$$

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2, 6)$.

Al ser una función racional, aplicamos la división de polinomios, ya que el grado del numerador es mayor al del denominador:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3} & x^2-2x+1 \\ \hline -\cancel{x^3}+2x^2-x & x+2 \\ \hline \quad 2\cancel{x^2}-x & \\ \quad -\cancel{2x^2}+4x-2 & \\ \hline \qquad 3x-2 & \end{array}$$

A partir de la prueba de la división:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \int \left(x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right)dx$$

Aplicamos el método de integración por fracciones simples para el tercer tramo de la integral donde:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} \rightarrow 3x-2 = A(x-1)+B$$

si $x=1$: $3-2=B \rightarrow B=1$

si $x=0$: $-2=-A+B \rightarrow -2=-A+1$; $A=3$

Por tanto:

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \int \left(x+2+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x+3\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Al pasar por el punto $P(2,6)$:

$$F(2)=6 \rightarrow \frac{2^2}{2}+2\cdot 2+3\cdot\ln|2-1| - \frac{1}{2-1} + C = 6$$

$$2+4+3\cdot\ln 1 - 1 + C = 6$$

$$C = 1.$$

Luego: $F(x) = \dfrac{x^2}{2}+2x+3\cdot\ln|x-1| - \dfrac{1}{x-1} + 1$

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & mz & = & -3 \\ -mx & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & - & 4y & + & mz & = & -6 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1,75 puntos)**

b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0,75 puntos)**

a) Obtenemos los valores de m a partir de la resolución del determinante de la matriz por Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = \cancel{3m} + 4m^2 + 1 - \cancel{3m} - m^2 - 4 = 0$$

$$3m^2 - 3 = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

CASO 1: Para $m \neq -1$ y $m \neq 1$.

Como el $Rg(A) = Rg(A^*) =$ nº incógnitas, el sistema será compatible determinado según el teorema de Rouché-Frobenius.

CASO 2: Para $m = -1$

Obtenemos un menor distinto de cero:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 \neq 0 \text{ , luego } Rg(A) = 2$$

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 1 + 12 + 9 + 4 - 6 = 0 \text{ ; luego } Rg(A^*) = 2 \text{ al compartir un menor.}$$

Como el $Rg(A) = Rg(A^*) \neq$ nº incógnitas, el sistema será compatible indeterminado según el teorema de Rouché-Frobenius.

CASO 3: Para $m = -1$

Obtenemos un menor distinto de cero:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 \neq 0 \text{ , luego } Rg(A) = 2$$

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 1 - 12 + 9 + 4 + 6 = -12 \text{; luego } Rg(A^*) = 3$$

Como el $Rg(A) \neq Rg(A^*)$, el sistema será incompatible según el teorema de Rouché-Frobenius.

b) Redefinimos el sistema para $m=2$:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ -2x+3y-z=1 \\ x-4y+2z=-6 \end{array}\right\}$$

Sabemos que para el valor de $m=2$, el sistema será compatible determinado, por lo que tendrá una única solución. Aplicamos la Regla de Cramer:

donde $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{18}{4} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-18}{4} = -2$$

Luego: $x=2$, $y=1$, $z=-2$

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A? **(1 punto)**

b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

a) Se sabe que una matriz no tiene inversa cuando su determinante es nulo. Por tanto, determinaremos los valores de m que lo hacen nulo a partir de la Regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + m + \cancel{m\sqrt{m}} - m^2 - m^2 - \cancel{m\sqrt{m}} = m^3 - 2m^2 + m = 0$$

$m(m^2-2m+1)=0 \rightarrow m=0$

$(m-1)^2=0 \rightarrow m=1$

Por tanto, para $m=0$ y $m=1$ la matriz A no tiene inversa.

b) Despejamos X de la ecuación matricial:

$AX = 12 \cdot I$

$A^{-1}AX = A^{-1} \cdot 12 \cdot I$

$X = 12 \cdot A^{-1}$

donde $A = \begin{pmatrix} 4 & \pm 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & 4 & 1 \\ \pm 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

La inversa de A viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) \quad ; \text{ donde:}$$

$|A| = m^3 - 2m^2 + m$; con $m=4$, luego: $|A| = 36$.

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 15 & \pm 6 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 & 0 \\ \pm 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 15 & \pm 6 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 & 0 \\ \pm 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = 12 \cdot A^{-1} = \frac{12}{36} \cdot \begin{pmatrix} 15 & \pm 6 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 & 0 \\ \pm 6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & \pm 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & 4 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & \pm 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & 4 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

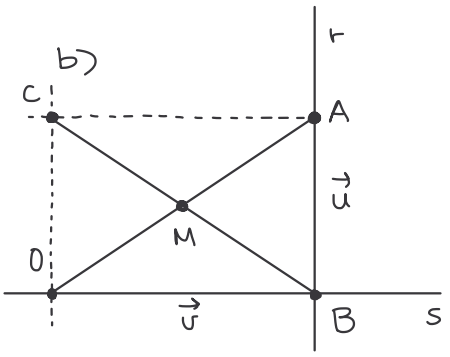
a) Dos vectores son ortogonales o perpendiculares entre sí si su producto escalar es nulo. Luego:

$\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow (1,a,b) \cdot (-1,2,3) = -1 + 2a + 3b = 0 \rightarrow 2a + 3b = 1$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (1,a,b) \cdot (2,0,-1) = 2 - b = 0 \rightarrow b = 2$

Por tanto: $a = \frac{1-3b}{2} = \frac{1-3\cdot 2}{2} = \frac{-5}{2}$

b)



Determinamos las ecuaciones paramétricas de r y s tal que:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(-4,4,7) \\ d\vec{r} = \vec{u} = (-1,2,3) \end{array} \right\} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases} \quad ; \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s = \left\{ \begin{array}{l} O(0,0,0) \\ d\vec{s} = \vec{v} = (2,0,-1) \end{array} \right\} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 0 \\ z = -\mu \end{cases} \quad ; \text{ con } \mu \in \mathbb{R}.$$

El punto de intersección de r y s viene dado por:

$$-4-\lambda=2\mu$$
$$4+2\lambda=0 \rightarrow \lambda=-2$$
$$7+3\lambda=-\mu \rightarrow \mu=-7-3\lambda=-7-3\cdot(-2)=-7+6=-1$$

Luego $B(-2,0,1)$.

El punto medio del segmento $\overline{OA}$ es:

$$M=\frac{O+A}{2}=\left(-2,2,\frac{7}{2}\right)$$

que coincide con el medio de $\overline{BC}$. Luego:

$$M=\frac{B+C}{2} \rightarrow C=2M-B=2\left(-2,2,\frac{7}{2}\right)-(-2,0,1)=(-2,4,6)$$

Luego, los puntos del paralelogramo son:

$A(-4,4,7)$ $B(-2,0,1)$ $C(-2,4,6)$ $O(0,0,0)$

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x-2=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto $P(1,2,3)$ y el vector director $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

a) Para que la recta r y s se corten, se tiene que cumplir que $Rg(A)=Rg(A^*)=2$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}\vec{dr}\\ \vec{ds}\end{pmatrix} \quad y \quad A^*=\begin{pmatrix}\vec{dr}\\ \vec{ds}\\ \vec{RS}\end{pmatrix}$$

Luego:

$$\vec{dr}=(1,-1,2)$$
$$\vec{ds}=(1+a,-a,3a)$$
$$\vec{RS}=(1,2,3)-(2,0,1)=(-1,2,2)$$

Por tanto, aplicando Sarrus:

$$A^*=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1+a & -a & 3a\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2a+4(1+a)+3a-2a+2(1+a)-6a=$$
$$=-a+6=0 \rightarrow a=6$$

Por tanto, para que r y s se corten $a=6$.

b) Para que ambas rectas sean perpendiculares, sus vectores directores posean un producto escalar nulo. Por tanto:

$$\vec{dr} = (1,-1,2)$$
$$\vec{ds} = (1+a,-a,3a)$$

$$\vec{dr}\cdot\vec{ds} = 0 \rightarrow (1,-1,2)\cdot(1+a,-a,3a) = 1+a+a+6a = 1+8a = 0$$

$$a = -1/8$$

Por tanto, para que r y s sean perpendiculares $a = -1/8$.