OPCIÓN A

1. Discutir el sistema $\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 3 \\ -x + y \quad = 1 \end{cases}$ según los valores del parámetro *a* [1,5 puntos]. Resolverlo en los casos en que admita infinitas soluciones [1 punto].

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Empecemos estudiando el rango de A según los valores de a:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a+1+1-a^2 = -a^2+a+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: rg A = rg B = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

X Para $a = -1$: las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ rg A = 2

Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+3+1+3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ rg B = 3

Como rg A $\neq$ rg B $\Rightarrow$ el sistema es INCOMPATIBLE.

X Para $a = 2$: las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ rg A = 2

Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3+1-6 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ rg B = 2

Como rg A = rg B = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

X Debemos resolver el sistema en este último caso, es decir para $a = 2$: a la vista del menor que da rango a la matriz de los coeficientes, la segunda y tercera ecuaciones son independientes respecto a las incógnitas x e y. Consideramos z como un parámetro: $z = \lambda$.

$$\begin{cases} x + y = 3 - 2\lambda \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2y = 4 - 2\lambda \quad \Rightarrow \quad y = 2 - \lambda \quad ; \quad x = 3 - 2\lambda - 2 + \lambda = 1 - \lambda \, .$$

Por tanto: $\boxed{x = 1-\lambda \;,\; y = 2-\lambda \;,\; z = \lambda}$

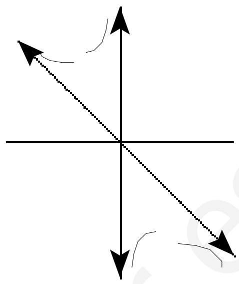
2. Dada la función $f(x) = -x - \dfrac{1}{x}$ se pide

a) Asíntotas y simetrías de la curva $y = f(x)$ [0,5 puntos].
b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1,5 puntos].
c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos].

SOLUCIÓN.

a) X $x = 0$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x \to 0} \left(-x - \dfrac{1}{x}\right) = \infty$.

Además: $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(-x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$



X $y = -x$ es una asíntota oblicua de la función. Además:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0^-$

X Simetrías: $f(-x) = x + \dfrac{1}{x} = -f(x)$ $\Rightarrow$ la función es simétrica respecto al origen de coordenadas.

b) $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{x^2} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = -1 \;,\; x = 1$ (puntos críticos)

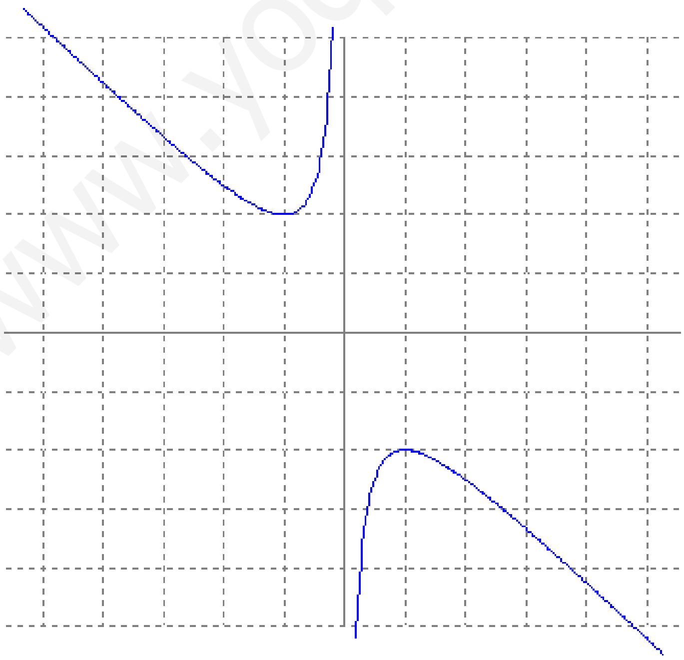
$f''(x) = -\dfrac{2}{x^3} \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} f''(-1) > 0 \;\Rightarrow\; \text{Mínimo relativo en } (-1\,,2) \\ f''(1) < 0 \;\Rightarrow\; \text{Máximo relativo en } (1\,,-2) \end{array}\right.$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

f' < 0		f' > 0		f' > 0		f' < 0
	! 1		0		1	

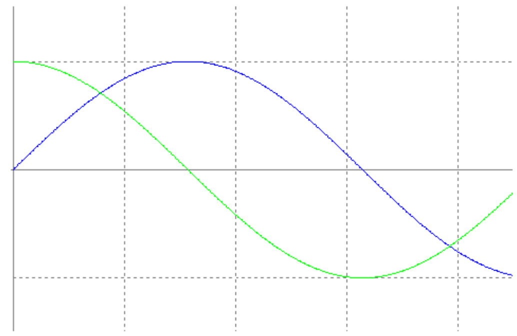
La función es creciente en $(-1\,,0) \cup (0\,,1)$ y decreciente en $(-\infty\,,-1) \cup (1\,,+\infty)$

c)



3. Hallar el área limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$ y el eje de ordenadas [2 puntos]

SOLUCIÓN.



En el primer cuadrante, el punto de corte de ambas funciones es:

$$\text{sen } x = \cos x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto: $S = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \text{sen } x)\, dx = \left[\ \text{sen } x + \cos x\ \right]_0^{\pi/4} =$

$$= \left(\text{sen } \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) - (\text{sen } 0 + \cos 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 =$$

$$= \boxed{\left(\sqrt{2} - 1\right) u^2}$$

4. Sea $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ una base ortonormal, hallar todos los vectores que son ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ que tengan módulo 1. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sean $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, 0, 1)$ los vectores de la base ortonormal y $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ las coordenadas de los vectores buscados respecto a la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Se tiene:

$$\vec{x} \perp \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 0, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$
$$\vec{x} \perp (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \cdot (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, x_2, x_3) \cdot (1, 1, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_3$$

luego $\vec{x} = (0, x_3, x_3)$.

Y como $|\vec{x}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_3^2 + x_3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x_3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x_3^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por tanto: $\boxed{\vec{x} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ y $\boxed{\vec{x} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

5. Nos dan la recta r determinada por los puntos A (2 , 1 , 1) y B (0 , !1 , !1) y la recta s determinada por los puntos C (1 , 2 , !1) y D (1 , 4 , !2). Razonar su posición relativa. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$ P $(1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{CD} = (0, 2, -1)$. Como $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son linealmente independientes: las rectas se cortan o se cruzan.

Consideremos el vector $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -2)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{el vector } \overrightarrow{AC} \text{ depende linealmente de } \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad \text{las rectas se cortan}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices B tales que A B = B A [1,5 puntos]; Calcular A^n con n entero positivo [1 punto].

SOLUCIÓN.

X Sea $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{23}&b_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{12}&b_{13}&0\\b_{22}&b_{23}&0\\b_{32}&b_{33}&0\end{pmatrix}\Rightarrow \left|\begin{array}{l}b_{11}=b_{22}=b_{33}=a\\b_{12}=b_{13}=b_{23}=0\\b_{21}=b_{32}=b\\b_{31}=c\end{array}\right. \quad \text{luego: } \boxed{B=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}}$$

X $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f dada por $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{si } x<-1\\ 1 & \text{si } -1\le x\le 1\\ 2x^2-x & \text{si } x>1\end{cases}$ razonando las respuestas [2 puntos].

SOLUCIÓN.

X Continuidad: la función es continua en $(-\infty,-1)\ \text{U}\ (-1,1)\ \text{U}\ (1,+\infty)$ por tratarse de funciones polinómicas.
Estudiemos la continuidad en $x=-1$ y en $x=1$:

$\boxed{x=-1}$:

a) $\exists\, f(-1)=1$

b) $\exists \lim\limits_{x\to-1} f(x)$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+2x+2\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1} 1=1\end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1) \Rightarrow$ la función es continua en $x=-1$

$\boxed{x=1}$:

a) $\exists\, f(1)=1$

b) $\exists \lim\limits_{x\to1} f(x)$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1} 1=1\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(2x^2-x\right)=1\end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to1} f(x)=1$

c) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1) \Rightarrow$ la función es continua en $x=1$

Por tanto, la función es continua $\forall\, x$

X Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<-1 \\ 0 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 4x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\exists\, f'(x)\ \ \forall x\in(-\infty,-1)\ \text{U}\ (-1,1)\ \text{U}\ (1,+\infty)$ por tratarse de funciones polinómicas.

Veamos si es derivable en $x=-1$ y en $x=1$:

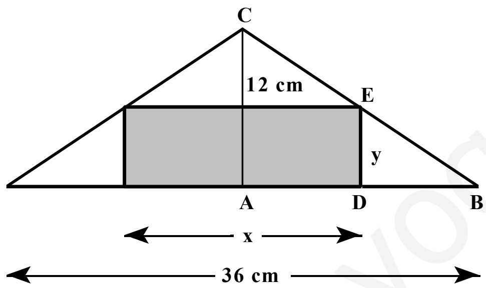
$\boxed{x=-1}$: $\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=2\cdot(-1)+2=0 \\ f'(-1^+)=0 \end{array}\right|\ \Rightarrow\ \exists\, f'(-1)$

$\boxed{x=1}$: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=0 \\ f'(1^+)=4\cdot 1-1=3 \end{array}\right|\ \Rightarrow\ \nexists\, f'(1)$

Por tanto, la función no es derivable en $x=1$.

3. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Suponer que un lado del rectángulo está en la base del triángulo [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



Sean x e y las dimensiones del rectángulo. La función que debe ser máxima es: $S=x\cdot y$

Busquemos una relación entre las variables x e y:

Los triángulos ABC y DBE son semejantes por estar en posición de Tales. Sus lados son entonces proporcionales:

$$\frac{AC}{DE}=\frac{AB}{DB}\ \Leftrightarrow\ \frac{12}{y}=\frac{18}{18-\frac{x}{2}}\ \Leftrightarrow\ 18y=216-6x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{216-6x}{18}=12-\frac{x}{3} \qquad \text{y por tanto:}\quad S=x\cdot y=x\cdot\left(12-\frac{x}{3}\right)=12x-\frac{1}{3}x^2\ \to\ \text{máxima}$$

$$S'(x)=12-\frac{2}{3}x=0\ \Rightarrow\ x=18 \quad \text{y como } S''(x)=-\frac{2}{3}<0\ \Rightarrow\ x=18 \text{ hace el área máxima.}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: $\boxed{\text{base}=18\text{ cm},\ \text{altura}=6\text{ cm}}$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(6,0)$ y $(0,4)$ y que tiene el centro en la recta x – y = 0. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Si el centro está en la recta $x-y=0\ \Leftrightarrow\ y=x$, sus coordenadas son $C(a,a)$. La distancia de C a los puntos dados de la circunferencia es la misma: $\sqrt{(a-6)^2+a^2}=\sqrt{a^2+(a-4)^2}\ \Leftrightarrow\ \cancel{a^2}-12a+36+\cancel{a^2}=\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-8a+16\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 20 = 4a \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad \Rightarrow \quad C(5, 5)$.

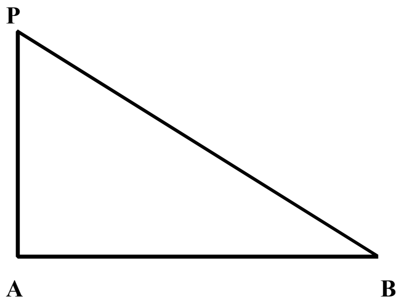
El radio es la distancia de C a cualquiera de los puntos de la circunferencia: $r = \sqrt{5^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26}$.

La ecuación de la circunferencia es entonces:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 26 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 26 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 - 10x - 10y + 24 = 0}$$

5. Hallar el punto P de la recta r de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ que con los puntos A $(1, 1, 1)$ y B $(3, 1, 0)$ forma un triángulo rectángulo de hipotenusa BP. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Si la hipotenusa es BP, el ángulo recto debe estar en A y, por tanto, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

Un punto P de la recta tiene por coordenadas: $P(2+\lambda, 1+\lambda, 1)$,

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{AP} = (1+\lambda, \lambda, 0) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 2 + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(1, 0, 1)}$$