OPCIÓN A

1. Discutir el sistema $\begin{cases} x+(a^2-1)\,y+a\,z=1 \\ (a^2-1)\,y+(a-1)\,z=0 \\ x+a^2\,z=0 \end{cases}$ según sea el valor del parámetro *a* [1,5 puntos]. Hallar, si existe, la solución del mismo cuando *a* = 0 [1 punto]

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2-1 & a & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & 0 \end{array}\right)$

Estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes según los valores de a:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2(a+1)(a-1)+(a+1)(a-1)^2-a(a+1)(a-1)=(a+1)(a-1)\left[a^2+a-1-a\right]=$$

$$=(a+1)(a-1)\left(a^2-1\right)=\left(a^2-1\right)^2=0 \quad\Rightarrow\quad a=-1\ ,\ a=1$$

X Para $a\neq -1$ y $a\neq 1$: $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=3=\text{n}^\text{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

X Para $a=-1$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rg} A=2$. Orlamos este menor con los términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rg} B=3$. Por tanto: $\operatorname{rg} A\neq \operatorname{rg} B \quad\Rightarrow$ el sistema es INCOMPATIBLE.

X Para $a=1$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Es evidente que $\operatorname{rg} A=1$ y puesto que el menor de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rg} B=2 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad \operatorname{rg} A\neq \operatorname{rg} B \quad\Rightarrow$ el sistema es INCOMPATIBLE

X Para $a=0$ el sistema es $\begin{cases} x-y =1 \\ -y-z=0 \\ x =0 \end{cases}$ compatible determinado de soluciones: $\boxed{x=0\ ,\ y=-1\ ,\ z=1}$

2. Dada la función *f* definida por $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ ax^3+bx & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x-16 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$ se pide:

a) Hallar *a* y *b* para que la función sea continua en todo x real [0,5 puntos]
b) Analizar su derivabilidad [1 punto]
c) Representación gráfica [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Puesto que en los tres intervalos de definición la función es polinómica, es continua. Los únicos puntos de posible discontinuidad son $x=-1$ y $x=2$.

X Para que la función sea continua en $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} 0=\lim_{x\to -1}\left(ax^3+bx\right) \Leftrightarrow 0=-a-b \quad (*)$$

X Para que la función sea continua en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\left(ax^3+bx\right)=\lim_{x\to 2}\left(11x-16\right) \Leftrightarrow 8a+2b=6 \Leftrightarrow 4a+b=3 \quad (*)$$

De las igualdades (*): $\begin{cases} -a-b=0 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow \boxed{a=1\ ,\ b=-1}$

b) Se tiene: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ x^3-x & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x-16 & \text{si } 2 \le x \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2-1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

$f'(x)$ existe para $\forall x \in (-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$. Veamos si la función es derivable en $x=-1$ y $x=2$:

X $x=-1$: $\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=0 \\ f'(-1^+)=2 \end{array}\right| \Rightarrow f'(-1^-)\ne f'(-1^+) \Rightarrow$ la función no es derivable en $x=-1$

X $x=2$: $\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=11 \\ f'(2^+)=11 \end{array}\right| \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow$ la función es derivable en $x=2$

c) X La función definida en $(-\infty,-1]$, $f(x)=0$, tiene como gráfica el eje de abscisas.

X La función definida en $(-1,2)$, $f(x)=x^3-x$:

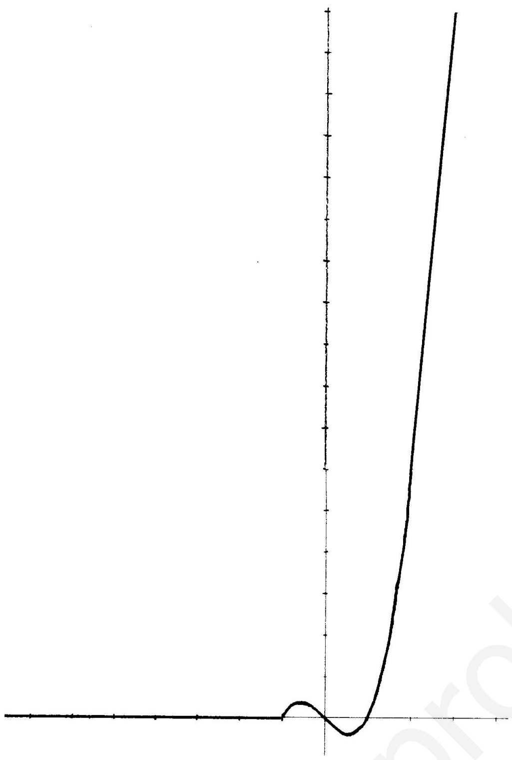
- Corta al eje de abscisas en los puntos: $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-1\ ,\ x=1$
- $f'(x)=3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\pm 0,58$ (puntos críticos)

$$f''(x)=6x \Rightarrow \left|\begin{array}{l} f''\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)<0 \Rightarrow \text{En } x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ tiene un máximo relativo}: \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)\approx(-0,58\ ,\ 0,38) \\ f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)>0 \Rightarrow \text{En } x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ tiene un mínimo relativo}: \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\approx(0,58\ ,\ -0,38) \end{array}\right.$$

- $f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$ y como $f'''(x)=6\ne 0 \Rightarrow$ En $(0,0)$ tiene un punto de inflexión

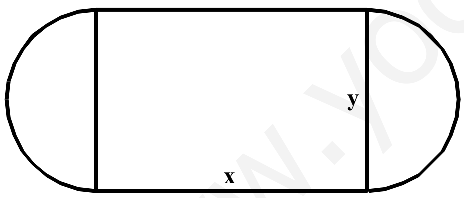
X La función definida en $[2,+\infty)$, $f(x)=11x-16$, es una recta que pasa por los puntos: $(2,6)$ y $(3,17)$.

La gráfica de la función es:



3. Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



Sean x e y los lados del rectángulo. El área del rectángulo debe ser máxima:

$$S = x \cdot y \;\rightarrow\; \text{máxima} \quad (1)$$

Como el perímetro de la pista debe ser de 400 metros:

$$P = 2x + \cancel{2}\pi \frac{y}{\cancel{2}} = 400 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{400 - 2x}{\pi}$$

Sustituyendo en (1): $S = x \cdot \frac{400-2x}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(400x - 2x^2\right) \;\Rightarrow\; S' = \frac{1}{\pi} \cdot \left(400 - 4x\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 100$

y como $S'' = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-4\right) < 0 \;\Rightarrow\; x = 100$ hace máxima la superficie del rectángulo . Las dimensiones son por tanto:

$$\boxed{x = 100 \text{ m} \;,\; y = \frac{200}{\pi}\,;\; 63,66 \text{ m}}$$

4. Hallar el punto simétrico del punto A $(\,!1\,,3\,,3\,)$ respecto al plano π de ecuación general $x+y-2z=5$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Calculemos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto A. Está determinada por el punto A y un vector normal al plano, $\vec{n}=(1\,,1\,,-2)$: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=3-2t \end{cases}$ es su ecuación en paramétricas. Calculemos las coordenadas del punto P de corte de la recta y el plano: $-1+t+3+t-2(3-2t)=5 \;\Rightarrow\; 6t=9 \;\Rightarrow\; t=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\;,\; y=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\;,\; z=3-\frac{6}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad P\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2},0\right)$$

El punto P es el punto medio del segmento de extremos A y su simétrico A':

$$\frac{1}{2}=\frac{-1+x}{2} \;\Rightarrow\; x=2 \;\;;\;\; \frac{9}{2}=\frac{3+y}{2} \;\Rightarrow\; y=6 \;\;;\;\; 0=\frac{3+z}{2} \;\Rightarrow\; z=-3 \;\text{ y por tanto: }\; \boxed{A'(2\,,6\,,-3)}$$

OPCIÓN B

1. Determinar *a*, *b* y *c* para que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ verifique que su traspuesta A^t coincide con su inversa A^{-1} [1,5 puntos]. Calcular en todos esos casos la matriz A^4 [1 punto].

SOLUCIÓN.

Calculemos las matrices traspuesta e inversa de A:

$$A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{vmatrix}=\frac{c}{\sqrt{2}}-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{c-b}{\sqrt{2}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{A^t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Adj}(A^t)} \begin{pmatrix} \frac{c-b}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & c & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} & -b & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\mathrm{Adj}(A^t)}{|A|}} A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c-b} & \frac{c\sqrt{2}}{c-b} & -\frac{1}{c-b} \\ -\frac{a}{c-b} & -\frac{b\sqrt{2}}{c-b} & \frac{1}{c-b} \end{pmatrix}$$

$$A^t = A^{-1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c-b} & \frac{c\sqrt{2}}{c-b} & -\frac{1}{c-b} \\ -\frac{a}{c-b} & -\frac{b\sqrt{2}}{c-b} & \frac{1}{c-b} \end{pmatrix} \Rightarrow a=0 \ , \ b=-c$$

Al igualar los términos a_{33}: $c=\frac{1}{2c} \Rightarrow 2c^2=1 \Rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ b=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. Para los valores encontrados de los parámetros se debe comprobar que los restantes elementos de ambas matrices son también iguales.

Por tanto: $\boxed{a=0 \ , \ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ c=-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ó $\boxed{a=0 \ , \ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ c=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

X Se tiene: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ó $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

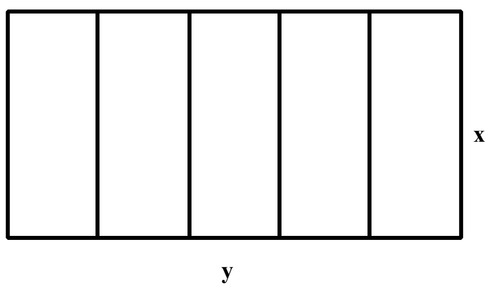
En el primer caso: $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En el segundo caso:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4=\left(A^2\right)^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Un jardinero dispone de 120 metros de valla y desea delimitar un terreno rectangular y dividirlo en cinco lotes con vallas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área sea la mayor posible? [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sean x e y los lados del rectángulo (ver figura).

Puesto que dispone de 120 metros de valla:

$$2y+6x=120 \Rightarrow y+3x=60 \Rightarrow y=60-3x$$

El área del terreno debe ser máxima: $S=x\cdot y=60x-3x^2$

$S' = 60 - 6x = 0 \;\Rightarrow\; x = 10$ y como $S'' = -6 < 0 \;\Rightarrow\; x = 10$ hace máxima el área del terreno. Sus dimensiones serán entonces: $\boxed{x = 10 \text{ m} \;,\; y = 30 \text{ m}}$

3. Dibujar el recinto limitado por la curva $y = x\,e^x$, el eje OX y la recta paralela al eje OY que pasa por el punto donde la curva tiene su mínimo relativo [1 punto]. Hallar el área de dicho recinto [1,5 puntos].

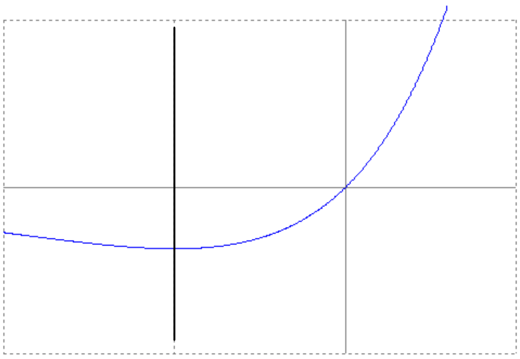
SOLUCIÓN.

X - Puntos de corte de la función con el eje OX: $x\,e^x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ pues $e^x \neq 0 \;\; \forall x$. Por lo tanto el único punto de corte con los ejes es el origen de coordenadas.

- Puntos de máximo y de mínimo: $y' = e^x + x\,e^x = e^x\,(1+x) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$ (punto crítico)

$$y'' = e^x\,(1+x) + e^x = e^x\,(2+x) \quad ; \quad y''(-1) > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo: } (-1\,,\,-0{,}37)$$

Puesto que la función es continua, en $(-\infty\,,-1)$ la función es decreciente y en $(-1\,,+\infty)$ es creciente.



X $S = \left| \int_{-1}^{0} x\,e^x\,dx \right| = \boxed{\begin{array}{l} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = e^x\,dx \;\Rightarrow\; v = e^x \end{array}} =$

$$= \left| \left[x\,e^x - \int e^x\,dx \right]_{-1}^{0} \right| = \left| \left[x\,e^x - e^x \right]_{-1}^{0} \right| = \left| -1 + \frac{2}{e} \right| =$$

$$= 1 - \frac{2}{e} \;;\; \boxed{0{,}26 \text{ u}^2}$$

4. Nos dan los vectores $a = (1\,,0\,,!1)$, $b = (0\,,2\,,!1)$ y $c = (2\,,0\,,0)$, hallar:

i) Valor absoluto del producto mixto de a, b y c y dar su significado geométrico. [1 punto]

ii) Ángulo que forman b y c. [0,5 puntos]

iii) Razonar si $(a\,,b\,,c)$ forman base y, en caso afirmativo, hallar las coordenadas de $(1\,,!2\,,0)$ en dicha base. [1 punto]

SOLUCIÓN.

i) $[a\,,b\,,c] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\,.$

Significado geométrico: el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son a, b y c es de 4 u^3.

ii) Sea α el ángulo que forman los vectores b y c. Se tiene: $\cos\alpha = \dfrac{b \cdot c}{|b|\,|c|} = \dfrac{0}{\sqrt{5} \cdot 2} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 90^{\circ}$

iii) Puesto que su producto mixto es distinto de 0, los vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base del espacio vectorial tridimensional.

Sean $(t_1\,,t_2\,,t_3)$ las coordenadas del vector $(1\,,-2\,,0)$ respecto a la base $(a\,,b\,,c)$:

$$(1\,,-2\,,0) = t_1\,(1\,,0\,,-1) + t_2\,(0\,,2\,,-1) + t_3\,(2\,,0\,,0) = (t_1 + 2t_3\,,\,2t_2\,,\,-t_1 - t_2) \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} t_1 + 2t_3 = 1 \\ 2t_2 = -2 \\ -t_1 - t_2 = 0 \end{array} \right. \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; t_2 = -1 \;,\; t_1 = 1 \;,\; t_3 = 0$ y, por tanto es: $(1\,,-1\,,0)$