

OPCIÓN A

1. Hallar los valores del parámetro a para que el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$
 admita infinitas soluciones [1,5 puntos]. Resolverlo en cada uno de esos casos [1 punto].

SOLUCIÓN.

X El sistema homogéneo tiene infinitas soluciones cuando la matriz de los coeficientes tenga rango < 3 y para ello:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cancel{a} + a^2 - \cancel{a} - \cancel{1} - a + \cancel{1} = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}, \boxed{a=1}$$

X Para $a=0$: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a las incógnitas

x e y . Considerando $z = \lambda$ como un parámetro: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ luego las soluciones son: $\boxed{x = -\lambda, y = -\lambda, z = \lambda}$

X Para $a=1$: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a x e y .

Considerando $z = \mu$ como un parámetro: $\begin{cases} x = -\mu \\ x + y = -\mu \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -\mu, y = 0, z = \mu}$

2. Comprobar que todas las funciones $f(x) = 3x^5 + 10x^3 + ax + b$ tienen un único punto de inflexión [1 punto]. Hallar a y b para que la tangente a la gráfica de dicha función en el punto de inflexión sea la recta $y = x + 2$ [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

X $f'(x) = 15x^4 + 30x^2 + a \Rightarrow f''(x) = 60x^3 + 60x = 0 \Rightarrow 60x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ (posible pto. de inflexión)

y como $f'''(x) = 180x^2 + 60 \Rightarrow f'''(0) = 60 \neq 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un solo punto de inflexión en $x = 0$: $(0, b)$

X La pendiente de la recta tangente es: $f'(0) = a$ y su ecuación: $y - b = a(x - 0) \Leftrightarrow y = ax + b$ e identificándola con la recta dada: $\boxed{a=1, b=2}$

3. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = *x*$ y $f(x) = x^2 - 2$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

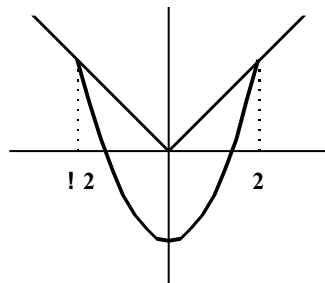
La primera función está definida así: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y su gráfica está formada por las bisectrices del segundo y del primer cuadrantes.

La gráfica de la segunda función es una parábola. Obtengamos el vértice:

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y como } f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{El vértice (mínimo relativo) es el punto } (0, -2).$$

Además pasa por los puntos $(-2, 2)$ y $(2, 2)$.

Tenemos:



Como el recinto es simétrico respecto al eje de ordenadas, obtengamos el área del recinto entre $x = 0$ y $x = 2$:

$$S = \int_0^2 [x - x^2 + 2] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - 0 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}$$

Por tanto, el área de todo el recinto es: $S = \frac{20}{3} u^2$

4. Lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos $(2, 2)$ y $(6, 0)$ [1,5 puntos].
Entre todas éstas escribir la ecuación de la que tiene radio mínimo [1 punto].

SOLUCIÓN.

Sea $C(x, y)$ el centro de dichas circunferencias: $(X - x)^2 + (Y - y)^2 = r^2$.

Como pasa por el punto $(2, 2)$:

$$(2 - x)^2 + (2 - y)^2 = r^2 \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = r^2 \quad (*)$$

Como pasa por el punto $(6, 0)$:

$$(6 - x)^2 + (0 - y)^2 = r^2 \Leftrightarrow 36 - 12x + x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x + 36 = r^2 \quad (*)$$

Igualando las expresiones (*):

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = x^2 + y^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow 8x - 4y - 28 = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x - y - 7 = 0} \text{ que es una recta.}$$

X El centro de las circunferencias es $C(x, 2x - 7)$ y el radio es la distancia de C al punto $(6, 0)$:

$$r = \sqrt{(x - 6)^2 + (2x - 7)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 4x^2 - 28x + 49} = \sqrt{5x^2 - 40x + 85}$$

Veamos cuándo el radio es mínimo: $r' = \frac{10x - 40}{2\sqrt{5x^2 - 40x + 85}} = \frac{5x - 20}{\sqrt{5x^2 - 40x + 85}} = 0 \Rightarrow x = 4$

$$r'' = \frac{5\sqrt{5x^2 - 40x + 85} - (5x - 20) \frac{10x - 40}{2\sqrt{5x^2 - 40x + 85}}}{5x^2 - 40x + 85} \Rightarrow r''(4) > 0 \Rightarrow \text{el radio es mínimo para } x = 4.$$

El centro es $C(4, 1)$ y el radio $r = \sqrt{80 - 160 + 85} = \sqrt{5}$ y, por tanto, la circunferencia:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 5 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices X tales que $XA = X$ [1 punto] y todas las matrices Y tales que $YA = B$ [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$XA = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+2b & -2a-3b \\ 2c+2d & -2c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=a \Rightarrow a=-2b \\ -2a-3b=b \Rightarrow b=b \\ 2c+2d=c \Rightarrow c=-2d \\ -2c-3d=d \Rightarrow d=d \end{cases}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda \\ -2\mu & \mu \end{pmatrix}$

$YA = B \Rightarrow Y = B \cdot A^{-1}$

Calculemos A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $Y = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ se pide:

- a) Asíntotas de la curva $y = f(x)$ [0,5 puntos]
- b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1,5 puntos]
- c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos]

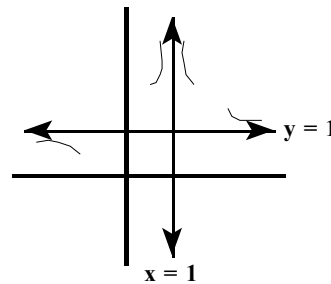
SOLUCIÓN.

a) X Asíntotas verticales: $x = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty$. Además: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$

X Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\frac{x^2}{-x^2 + 2x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{1} \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow y = 1 \text{ es una asíntota horizontal de la función}$$

Además: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0^-$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0^+$. Se tiene entonces:

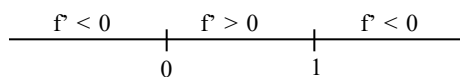


$$b) \quad f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1)(x-1-2x)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ (punto crítico)}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x-1)^3 - 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1)^2(x-1+3x)}{(x-1)^6} = \frac{-2(4x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow f''(0) > 0 \Rightarrow \text{En } x=0 \text{ la función}$$

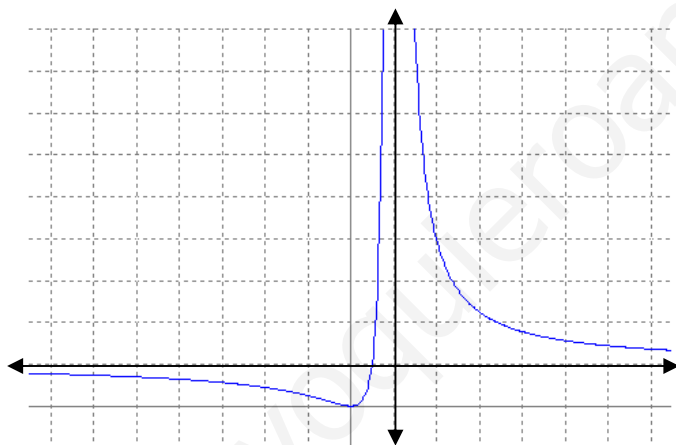
tiene un mínimo relativo: $(0, 0)$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento: $f'(x)$ cambia de signo en $x=0$ y en $x=1$:



Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
y creciente en $(0, 1)$

c)



3. Hallar los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 1$ más próximos al punto de coordenadas $(4, 0)$ [2 puntos]. ¿Cómo se llama dicha curva?, dibujarla [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$ luego los puntos de la curva son $(x, \sqrt{x^2 - 1})$. La distancia al punto $(4, 0)$ es:

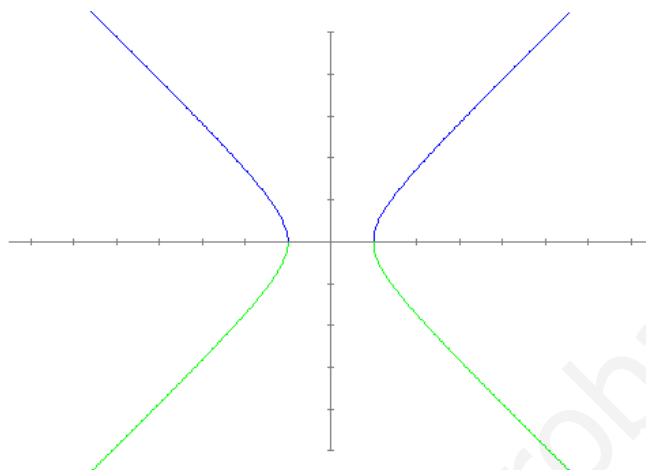
$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x^2 - 1} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 - 8x + 15}$. Veamos cuándo es mínima esta distancia:

$$d' = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 15}} = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 15}} = 0 \Rightarrow x=2$$

$$\text{y como } d'' = \frac{2\sqrt{2x^2 - 8x + 15} - (2x-4) \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 15}}}{2x^2 - 8x + 15} \Rightarrow d''(2) > 0 \Rightarrow \text{Para } x=2 \text{ la distancia es}$$

mínima. Por tanto, los puntos buscados son: $(2, \sqrt{3})$ y $(2, -\sqrt{3})$

X La curva es una hipérbola: $a=1$, $b=1 \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ luego los focos son los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$. Las asíntotas son las rectas: $y=x$ e $y=-x$.



4. Hallar el punto (o puntos) P de la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=1 \\ y=2+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ que con los puntos A (1, 1, 1) y B (3, 1, -1) forman un triángulo isósceles de lados iguales AP y BP [1,5 puntos]. Hallar también el área de dichos triángulos [1 punto].

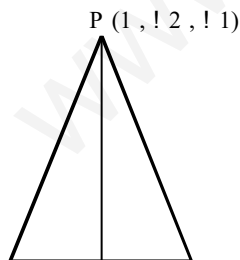
SOLUCIÓN.

Sea $P(1, 2+2\lambda, 1+\lambda)$.

$$d(A, P) = d(B, P) \Rightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (2+2\lambda-1)^2 + (1+\lambda-1)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (2+2\lambda-1)^2 + (1+\lambda-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + \lambda^2 = 4 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 \Rightarrow 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \boxed{P(1, -2, -1)}$$

X



A (1, 1, 1) M B (3, 1, -1)

$$b = d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Coordenadas del punto medio de AB: $M(2, 1, 0)$

$$\text{luego: } h = d(P, M) = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{11}$$

$$\text{y por tanto: } S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = \boxed{\sqrt{22} \text{ u}^2}$$