

Septiembre 2000

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

i) Hallar el valor o valores de a para que se cumpla la igualdad $A^2 + 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3 [1,5 puntos].

ii) Calcular en esos casos la matriz inversa de A [1 punto].

SOLUCIÓN.

$$\begin{aligned} \text{i) } A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 \end{aligned}$$

ii) Para $a = -1$: como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ la matriz A tiene inversa. Para calcularla, damos los

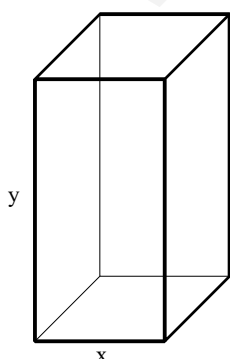
siguientes pasos: (1) Calculamos la matriz traspuesta: A^t . (2) Calculamos la matriz adjunta de la traspuesta:

$\text{Adj}(A^t)$. (3) Dividimos por el valor del determinante de A : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, hallar las dimensiones (lado de la base y altura) del que tiene volumen máximo. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



$$\text{Se tiene: } 2x + 2y = 30 \Leftrightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$$

$$\text{La función que debe ser máxima es: } V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (15 - x) = 15x^2 - x^3$$

Estudiemos los valores de x en los que esta función alcanza un máximo:

$$V' = 30x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(10 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 10$$

$$V'' = 30 - 6x : \quad \begin{aligned} V''(0) &= 30 > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ V''(10) &= -30 < 0 \Rightarrow x = 10 \text{ máximo} \end{aligned}$$

Por tanto, las medidas del prisma de volumen máximo son: arista de la base = 10 cm, arista lateral = 5 cm

3. Tenemos la función f definida para todo número real no negativo y dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Se pide su representación gráfica [0,5 puntos], hallar $\int_0^3 f(x) dx$ [1,5 puntos] e interpretar geoméricamente el resultado [0,5 puntos].

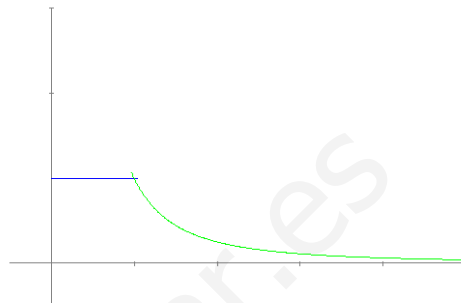
SOLUCIÓN.

X La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es decreciente $\forall x > 1$ pues

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 \quad \forall x > 1.$$

X $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

X Pasa por $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{4})$, ...



$$X \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = [x]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 1 - 0 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{5}{3}$$

Se trata del área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia C que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$ y es tangente a la recta $r: y = 3x + 2$ [1,5 puntos]. En el haz de rectas paralelas a r hay otra tangente a C , hallar su ecuación. [1 punto]

SOLUCIÓN.

Puesto que la tangente $y = 3x + 2$ pasa por el punto $(0, 2)$ y la circunferencia también, éste debe ser el punto de tangencia. El centro de la circunferencia estará en el punto de corte de la mediatriz del segmento de extremos $(0, 2)$ y $(0, -2)$ que es el eje de abscisas $y = 0$ y la normal a $y = 3x + 2$ en $(0, 2)$: $y - 2 = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow y = 2 - \frac{x}{3}$

$$\text{El centro de la circunferencia es por tanto: } \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 - \frac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow C(6, 0)$$

$$\text{El radio es: } r = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{La ecuación de la circunferencia es por tanto: } (x-6)^2 + (y-0)^2 = 40 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0$$

El haz de rectas paralelas a r es: $y = 3x + n$ y el punto de tangencia de la segunda tangente debe ser el simétrico del $(0, 2)$ respecto al centro de la circunferencia:

$$6 = \frac{0 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 12 \quad ; \quad 0 = \frac{2 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -2 \text{ es decir, el punto } (12, -2).$$

$$\text{Haciendo que la recta del haz pase por este punto: } -2 = 36 + n \Rightarrow n = -38 \Rightarrow y = 3x - 38$$

Septiembre 2000

OPCIÓN B

1. Sea A una matriz 4×4 cuyas filas, de arriba a abajo son F_1, F_2, F_3 y F_4 y cuyo determinante vale 2. Sea

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Calcular razonadamente:}$$

- 1) El determinante de la matriz $A \cdot B$ [1 punto]
2) El determinante de la matriz $3A$ [0,5 puntos]
3) El determinante de la matriz cuyas filas son (de arriba a abajo): $2F_1 + F_2, F_2, 3F_4$ y $F_3 + F_1$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

Calculemos el determinante de B : $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

(1) y (2): desarrollando por los adjuntos de la primera fila

1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-1) = -2$

2) Si multiplicamos todos los elementos de una línea por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número. En nuestro caso, cada una de las cuatro líneas (filas o columnas) se multiplica por tres, luego el determinante quedará multiplicado por 3^4 : $|3A| = 81 \cdot 2 = 162$

3) $\begin{vmatrix} 2F_1 + F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 6 \cdot 2 = 12$

2. Hallar a, b y c para que la función f definida en todo número real y dada por $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo x real y además alcance un extremo relativo para $x = 3$ [1,5 puntos]. Representar gráficamente la función f' , analizando su continuidad y derivabilidad [1 punto].

SOLUCIÓN.

Puesto que las funciones definidas a la izquierda y a la derecha de $x = 2$ son continuas, basta exigir que lo sea en $x = 2$ y para ello debe ser $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow 1 = 4a + 2b + c$ (*)

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ 2ax + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Para que la función sea derivable en $x = 2$ debe ser: $f'(2^-) = f'(2^+) \Leftrightarrow 1 = 4a + b$ (*)

Para que la función tenga un extremo relativo en $x = 3$ debe ser $f'(3) = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$ (*)

De las tres condiciones (*) se sigue:
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ 4a + b = 1 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = -1 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 3, c = -3$$

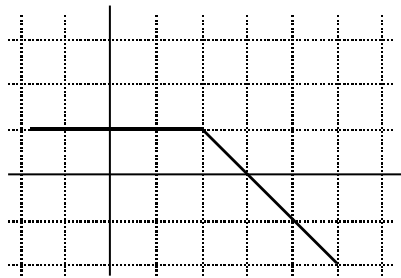
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

La función es continua y derivable $\forall x \neq 2$ por tratarse de funciones polinómicas. Veamos lo que ocurre en $x = 2$:

Continuidad: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 = f(2) \Rightarrow$ la función es continua.

Derivabilidad: $f'(2^-) = 0, f'(2^+) = -1 \Rightarrow$ la función no es derivable en $x = 2$

Su gráfica es:



3. Calcular $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} dx$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Puesto que
$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2 - x - 2 + 3}{x^2 - x - 2} = 1 + \frac{3}{x^2 - x - 2}$$

Se tiene:
$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2 - x - 2} \right) dx = x + \int \frac{3}{x^2 - x - 2} dx = (I)$$

Por otra parte: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1, 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1) \cdot (x-2) \Rightarrow$

$$\frac{3}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1) \cdot (x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{x^2 - x - 2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A+B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A-B=0 \\ -2A+B=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3A=3 \Rightarrow A=-1, B=1 \Rightarrow \int \frac{3}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x+1| + \ln|x-2| = \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$$

y por tanto: $(I) = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$

4. Hallar el valor del parámetro m para que las rectas r y s dadas por:

$$r: \frac{x+5}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2} \quad s: \frac{x-m}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

se corten [1,5 puntos]. Encontrar entonces el punto de intersección [1 punto]

SOLUCIÓN.

Un punto de r es: $A(-5, 1, -1)$, y un vector direccional: $\vec{u} = (-3, 2, 2)$

Un punto de s es: $B(m, 0, 1)$, y un vector direccional: $\vec{v} = (-1, 4, 2)$

Las dos rectas se cortarán cuando los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ sean linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ m+5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -24 + 2 + 4m + 20 - 8m - 40 + 4 - 6 = -4m - 44 = 0 \Rightarrow m = -11$$

Para obtener el punto de corte, podemos proceder así:

la recta r en paramétricas es $\begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ luego un punto cualquiera de r es $(-5 - 3t, 1 + 2t, -1 + 2t)$. Veamos cuál

debe ser el valor de t para que este punto pertenezca a la recta s (con $m = -11$):

$$\frac{-5 - 3t + 11}{-1} = \frac{1 + 2t}{4} = \frac{-1 + 2t - 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + 3t = \frac{1 + 2t}{4} \Rightarrow -24 + 12t = 1 + 2t \Rightarrow 10t = 25 \Rightarrow t = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \\ -6 + 3t = -1 + t \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Luego el punto común de ambas rectas es: $\left(-5 - \frac{15}{2}, 1 + 5, -1 + 5\right) = \left(-\frac{25}{2}, 6, 4\right)$