Septiembre 2002

OPCIÓN A

1. *Sean A y B las matrices siguientes:* $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

Es fácil comprobar que ambas tiene el máximo rango, que es 3. Pero ¿qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz A + 8B según los valores del parámetro 8. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\ \lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{pmatrix}$. Veamos para qué valores de λ el rango es máximo, es decir 3:

$$\begin{vmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\ \lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\lambda\end{vmatrix}=4\lambda+2\lambda^2+\lambda+\lambda^2-2-2\lambda-\lambda-\lambda^2-2\lambda^3=-2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-2=2\cdot\left(-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1\right)=0\ \Rightarrow$$

	! 1	1	1	! 1
1		! 1	0	1
	! 1	0	1	0

$$\Rightarrow\ -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=0\ \Rightarrow\ (\lambda-1)\left(-\lambda^2+1\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (\lambda-1)(1+\lambda)(1-\lambda)=0\ \Rightarrow\ \lambda=1\ ,\ \lambda=-1$$

Se tiene:

X Para $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq1$: $\left|A+\lambda B\right|\neq0\ \Rightarrow\ \operatorname{rg}(A+\lambda B)=3$

X Para $\lambda=-1$: $A+\lambda B=A-B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \operatorname{rg}(A+\lambda B)=2$ pues el menor $\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=-2\neq0$

X Para $\lambda=1$: $A+\lambda B=A+B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \operatorname{rg}(A+\lambda B)=2$ pues el menor $\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2\neq0$

2. *Sea la función* $f(x)=x\cos x$.

a) ¿Tiene límite en +4? (justifica tu respuesta). [1 punto]
b) Calcula la integral de f entre x = 0 y el primer cero positivo que tiene la función. [1,5 puntos]
Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula.

SOLUCIÓN.

a) No existe $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\cos x)$ porque la función $g(x)=\cos x$ es periódica y oscila entre !1 y 1.

b) $f(x)=x\ \cos\ x=0\ \Rightarrow\ \left|\begin{array}{l}x=0\\ \cos x=0\ \Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$

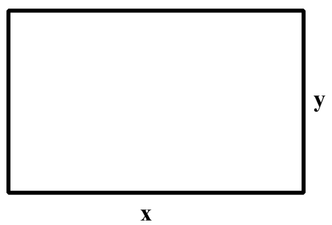
Calculemos una primitiva de $f(x)$ (utilizaremos el método de integración por partes):

$$\int (x \cdot \cos x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos x\, dx \;\Rightarrow\; v = \operatorname{sen} x \end{matrix} \right| = x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x$$

Por tanto: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \cos x)\, dx = \left[\, x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$

3. *En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sean x e y las medidas del rectángulo de área máxima y, por tanto, con el que se consigue el premio máximo. Se tiene:

$$2x + 2y = 20 \;\Leftrightarrow\; x + y = 10 \;\Rightarrow\; y = 10 - x$$

El premio (en euros) es igual al área del rectángulo (en decímetros cuadrados):

$$P = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2 \;\Rightarrow\; P' = 10 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 5$$

$P'' = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ Para $x = 5$, P es máximo. Por tanto, las medidas del rectángulo que debe construirse para obtener el máximo premio son $x = 5$ e $y = 5$, es decir un cuadrado.

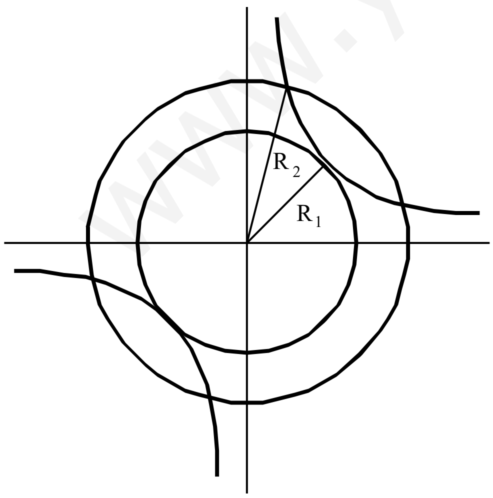
4. *Sea H la hipérbola de ecuación* $xy = 4$. *Sean C_1 y C_2 dos circunferencias, ambas con centro el origen de coordenadas y tales que*

a) C_1 es tangente a la hipérbola.

b) C_2 corta a la hipérbola H en un punto de abscisa 1.

Representa gráficamente las tres cónicas anteriores [1 punto] *y calcula el área de la corona circular encerrada entre las dos circunferencias* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.



La hipérbola de ecuación $x \cdot y = 4 \;\Leftrightarrow\; y = \dfrac{4}{x}$ es simétrica respecto al origen de coordenadas. Tiene dos asíntotas: el eje OY $\left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \,,\; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \right)$ y el eje OX $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^- \,,\; \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+ \right)$. La rama situada en el cuadrante de abscisas y ordenadas positivas pasa por los puntos $(1,\, 4)$, $(2,\, 2)$ y $(4,\, 1)$ y la situada en el cuadrante de abscisas y ordenadas negativas pasa por los puntos $(-1,\, -4)$, $(-2,\, -2)$ y $(-4,\, -1)$.

La circunferencia C_1 está centrada en el origen y debe ser tangente a la hipérbola en los puntos $(-2,\, -2)$ y $(2,\, 2)$, por lo que su radio será: $R_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. La circunferencia C_2 está centrada en el origen y pasa por el punto $(1,\, 4)$ por lo que su radio será: $R_2 = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

El área de la corona circular es: $A = \pi \cdot {R_2}^2 - \pi \cdot {R_1}^2 = \pi \cdot \left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) = \pi \cdot (17 - 8) = 9\pi \;\; u^2$

Septiembre 2002

OPCIÓN B

1. *a) Discute el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$ *según el valor del parámetro a.* [1,5 puntos]

b) Halla, si existe, la solución cuando a = 0. [1 punto]

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & a-1 \end{array}\right)$

a) El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ el rango de ambas matrices es, como mínimo, 2. Estudiemos para qué valores de a el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 + 2a - 3 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Se tiene: X Para $a \neq -3$ y $a \neq 1$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} M = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para $a = -3$: $\operatorname{rg} A = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 12 \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} M = 3 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} M \;\Rightarrow\;$ el sistema es incompatible.

X Para $a = 1$: $\operatorname{rg} A = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} M = 2 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} M < \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ \quad -y - z = -1 \\ 3x \qquad\;\; = -1 \end{cases}$.

La tercera ecuación facilita el valor de x: $x = -\dfrac{1}{3}$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación: $\begin{cases} y - z = \dfrac{2}{3} \\ y + z = 1 \end{cases}$ y sumando ambas ecuaciones: $2y = \dfrac{5}{3} \;\Rightarrow\; y = \dfrac{5}{6}$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $z = 1 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6}$.

Las soluciones del sistema son, por tanto: $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{5}{6}$, $z = \dfrac{1}{6}$

2. *Sea la función f definida para todo número real x en la forma* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{sen} \beta x + \cos \beta x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *Se pide:*

a) *Determinar el valor de ∃ para que f sea derivable en x = 0.* [1,3 puntos]

b) *Calcular la integral de f sobre el intervalo* $\left(0\,,\ \frac{\pi}{3}\right)$. [1,2 puntos]

Nota: Se entiende que la función f cuya integral se pide en la parte b) es la determinada previamente en la parte a). No obstante, si alguien no ha sabido calcular el valor de ∃, debe integrar f dejando ∃ como parámetro.

SOLUCIÓN.

a) Se tiene: $f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \beta \cos \beta x - \beta \operatorname{sen} \beta x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x = 0$: $f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) \Rightarrow 3 = \beta$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\operatorname{sen} 3x + \cos 3x\right) dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(3 \cdot \operatorname{sen} 3x + 3 \cdot \cos 3x\right) dx = \left[\frac{1}{3}\left(-\cos 3x + \operatorname{sen} 3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$\left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\cos \pi + \operatorname{sen} \pi\right)\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\cos 0 + \operatorname{sen} 0\right)\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

3. *Sea la función* $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x-1}$

a) *Determinar su dominio, es decir, el conjunto de puntos donde está definida.* [0,5 puntos]

b) *Estudiar sus máximos y mínimos (si los tiene) en el intervalo (!1 , 1), precisando si son absolutos o relativos respecto al intervalo indicado.* [2 puntos]

SOLUCIÓN.

$$f(x) = \frac{x - 1 - 4x - 4}{(x+1) \cdot (x-1)} = -\frac{3x + 5}{x^2 - 1}$$

a) Por tratarse de una función racional, el dominio está formado por todos los valores de x que no anulen el denominador: $D(f) = | - \{-1\,,\ 1\}$

b) $f'(x) = -\frac{3 \cdot \left(x^2 - 1\right) - (3x + 5) \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = -\frac{3x^2 - 3 - 6x^2 - 10x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{3x^2 + 10x + 3}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -3 \notin (-1,\ 1) \end{cases}$$

Luego el único punto crítico de la función en el intervalo $(-1,\ 1)$ es $x = -\frac{1}{3}$. Veamos si se trata de un máximo o de un mínimo:

$$f''(x) = \frac{(6x + 10) \cdot \left(x^2 - 1\right)^2 - \left(3x^2 + 10x + 3\right) \cdot 2\left(x^2 - 1\right) \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^4}$$

Al sustituir x por $-\frac{1}{3}$ en $f''(x)$, el signo de la segunda derivada depende del signo del término $6x+10$ pues los otros términos o son positivos o nulos. Así: $f''\left(-\frac{1}{3}\right)>0 \Rightarrow$ La función tiene una mínimo relativo en $x=-\frac{1}{3}$.

Se trata, además, del mínimo absoluto en el intervalo $(-1,\ 1)$, pues en los extremos del intervalo la función tiene sendas asíntotas verticales y $\lim\limits_{x\to -1^+} -\frac{3x+5}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{3x+5}{x^2-1}=+\infty$

4. *a) Halla razonadamente la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos $(2,0)$ y $(0,1)$.* [1 punto]
b) Entre todas estas circunferencias halla la ecuación de aquélla o aquéllas cuyo centro equidista de los ejes coordenados. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sean $C(x,\ y)$ los centros de las circunferencias y sean $A(2,\ 0)$ y $B(0,\ 1)$ los puntos dados. Se tiene:

$$d(C,\ A)=d(C,\ B) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 4x-2y-3=0$ es decir, se trata de una recta.

b) Si el centro equidista de los ejes coordenados: $x=y \Rightarrow 4x-2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

Además, $r=d(C,\ A)=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ con lo que la ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4} \Leftrightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{10}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-3x-3y+2=0$$