Junio 2002

OPCIÓN A

1. *a) Discute el sistema* $\begin{cases} (a^2-1)x + (a-1)y = 0 \\ a^2y + z = 0 \\ (a^2-1)x + ay + z = 1 \end{cases}$ *según el valor del parámetro a.* [1,3 puntos]

b) Halla, si existe, la solución cuando a = 4. [1,2 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Comparemos los rangos de las matrices de los coeficientes A y ampliada B: $\left(\begin{array}{ccc|c} a^2-1 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 & 0 \\ a^2-1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

En la matriz de los coeficientes, el máximo rango posible es 3:

$$\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ a^2-1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4 - a^2 + a^3 - a^2 - a + 1 - a^3 + a = a^4 - 2a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \Rightarrow a = -1 \ , \ a = 1$$

X Para $a \neq -1$ y 1: rg A = rg B = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para $a = -1$, las matrices son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Se tiene: rg A = 2, rg B = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible

X Para $a = 1$, las matrices son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Se tiene: rg A =1 , rg B = 2 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para a = 4, el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} 15x + 3y = 0 \\ 16y + z = 0 \\ 15x + 4y + z = 1 \end{cases}$. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 1 \\ 15 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{240 + 45 - 60} = \frac{3}{225} = \frac{1}{75} \ ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{225} = \frac{-15}{225} = -\frac{1}{15} \ ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 15 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{225} = \frac{240}{225} = \frac{16}{15}$$

2. *Se sabe que la función* $f(x) = x^3 + ax + b$ *corta a su función derivada en x = 1 y que, además, en dicho punto f tiene un extremo.*

a) *Determina los valores de a y b.* [1 punto]
b) *Determina la naturaleza del extremo que f tiene en x = 1.* [0,5 puntos]
c) *¿Tiene f algún otro extremo?* [1 punto]

SOLUCIÓN.

www.yoquieroaprobar.es

$f(x) = x^3 + ax + b \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + a$

Como en x = 1 tiene un extremo relativo: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \;\Rightarrow\; a = -3$

Además: $f(1) = f'(1) \;\Rightarrow\; 1 - 3 + b = 0 \;\Rightarrow\; b = 2$

b) $f''(x) = 6x$ y como $f''(1) = 6 > 0$ en x = 1 la función tiene un mínimo relativo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = -1\;,\; x = 1$ (puntos críticos)

Como $f''(-1) = -6 < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

3. Sean las funciones $f(x) = \log\, x - b$, $g(x) = a\sqrt{x} + b$. (*Nota: el logaritmo es neperiano*)

a) Determina a y b para que ambas funciones sean tangentes entre sí al pasar por x = 1. [1 punto]
b) Determina en qué puntos se anula cada una de estas funciones. [1 punto]
c) Determina cuál es el dominio de la función producto h(x)2 = f(x) g(x). [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Si las funciones son tangentes, tendrán una tangente común en x = 1, es decir $f'(1) = g'(1)$ y además $f(1) = g(1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\;,\quad g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; 1 = \frac{a}{2} \;\Rightarrow\; a = 2\,. \qquad f(1) = g(1) \;\Rightarrow\; -b = 2 + b \;\Rightarrow\; b = -1$$

b) $f(x) = \log x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \log x = -1 \;\Rightarrow\; x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. $\quad g(x) = 2\sqrt{x} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x} = 1 \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

c) $h(x) = (\log x + 1)\cdot\left(2\sqrt{x} - 1\right)$. La función producto tiene como dominio la intersección de los dominios de f y de g:

$$\mathrm{Dom}(f) = (0,\ \infty) \ \text{ y } \ \mathrm{Dom}(g) = [0,\ \infty) \;\Rightarrow\; \mathrm{Dom}(h) = (0,\ \infty)$$

4. *La recta* $\begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda y + z = 1 \end{cases}$ *corta en P y Q respectivamente a los pl2anos y = 0 y x = 0.*

a) Determina los puntos (si los hay) en el eje OZ que equidisten de P y Q. Naturalmente estos posibles puntos dependen del valor de λ. [1,3 puntos]
b) Determina λ *para que además los puntos del eje OZ formen con P y Q un triángulo equilátero.* [1,2 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Calculemos las coordenadas de P y de Q:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow\; P\,(1,\ 0,\ 1) \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow\; Q\,(0,\ 1,\ 1 - \lambda)$$

Un punto del eje OZ tiene por coordenadas $Z(0,\ 0,\ z)$. Debe ocurrir: $d\,(Z,\ P) = d\,(Z,\ Q)$, es decir:

$$\sqrt{1^2 + (1 - z)^2} = \sqrt{1^2 + (1 - \lambda - z)^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{1 + 1 + z^2 - 2z} = \sqrt{1 + 1 + \lambda^2 + z^2 - 2\lambda - 2z + 2\lambda z} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 + z^2 - 2z = 2 + \lambda^2 + z^2 - 2\lambda - 2z + 2\lambda z \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda z = 0 \;\Rightarrow\; \lambda\cdot(\lambda - 2 + 2z) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0,\ z = \frac{2 - \lambda}{2}$$

X Si $\lambda = 0$: cualquier punto de OZ equidista de P y Q.

X Si $\lambda \neq 0$: los puntos de OZ que equidistan de P y Q son $Z\left(0,\ 0,\ \frac{2 - \lambda}{2}\right)$

www.yoquieroaprobar.es

b) X Si $\lambda = 0$: $P(1,\ 0,\ 1)$, $Q(0,1,1)$, $Z(0,\ 0,\ z)$. Se tiene: $d(P,\ Q) = \sqrt{2}$ y $d(P,\ Z) = \sqrt{1+(z-1)^2} \Rightarrow$

$1+(z-1)^2 = 2 \Rightarrow (z-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z-1=1 \Rightarrow z=2 \\ z-1=-1 \Rightarrow z=0 \end{cases}$ luego los puntos $Z_1 = (0,\ 0,\ 2)$ y $Z_2 = (0,\ 0,\ 0)$ forman un triángulo equilátero con P y Q.

X Si $\lambda \neq 0$: $P(1,\ 0,\ 1)$, $Q(0,\ 1,\ 1-\lambda)$, $Z\left(0,\ 0,\ \frac{2-\lambda}{2}\right)$. Se tiene: $d(P,\ Q) = \sqrt{1+1+\lambda^2}$ y

$d(P,\ Z) = \sqrt{1+\left(1-\frac{\lambda}{2}-1\right)^2} = \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4}} \Rightarrow 2+\lambda^2 = 1+\frac{\lambda^2}{4} \Rightarrow 8+4\lambda^2 = 4+\lambda^2 \Rightarrow 3\lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \sqrt{-\frac{4}{3}}$ luego ningún punto de OZ puede formar un triángulo equilátero con P y Q.

Junio 2002

OPCIÓN B

1. Sea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ;\ a, b \in \Re \right\}$.

a) Prueba que si A, B 0 $\mathcal{M}$ también A+B y AB están en $\mathcal{M}$. [1 punto]

b) Determina las matrices C 0 $\mathcal{M}$ que verifican que $C^2 = 2C$. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ dos matrices de $\mathcal{M}$.

X $A+B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix} \in M$ X $A \cdot B = \begin{pmatrix} aa'+bb' & ab'+ba' \\ ba'+ab' & bb'+aa' \end{pmatrix} \in M$

b) Sea $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow C^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$; $2C = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$.

$C^2 = 2C \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 2a \\ 2ab = 2b \end{cases}$ $2ab = 2b \Rightarrow a = 1$ y sustituyendo en la primera ecuación:

$1+b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

Por lo tanto, hay dos matrices que satisfacen la igualdad: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. *Sea la integral* $\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x \, dx$

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$. [1,5 puntos]

b) *Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $t = e^x \Rightarrow dt = e^x\, dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$; $e^{2x} = t^2\, 2$

www.yoquieroaprobar.es

Se tiene: $\int e^{2x}\,\text{sen}\,e^{x}\,dx = \int t^2 \cdot \text{sen}\,t \cdot \frac{dt}{t} = \int t \cdot \text{sen}\,t \cdot dt = (1)$ 2

Aplicando el método de integración por partes: $\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \text{sen}\,t \cdot dt \Rightarrow v = -\cos t \end{array}$

$$(1) = -t \cdot \cos t + \int \cos t \cdot dt = -t \cdot \cos t + \text{sen}\,t + C = -e^{x} \cdot \cos e^{x} + \text{sen}\,e^{x} + C$$

b) $-e^{0} \cdot \cos e^{0} + \text{sen}\,e^{0} + C = 0 \;\Rightarrow\; -\cos 1 + \text{sen}\,1 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = \cos 1 - \text{sen}\,1$

3. *Sea* $f(x) = x\left|x-1\right|^2$.

a) Halla los extremos y puntos de inflexión de la función f. [2 puntos]

b) *Calcula el límite de f en +4 y !4.* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Como $\left|x-1\right|^2 = \begin{cases} \left[-(x-1)\right]^2 = x^2 - 2x + 1 & \text{para } x < 1 \\ (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$ la función es: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad \forall x$

a) Los extremos relativos cumplen $f'(x) = 0$: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = 1$

Los posibles extremos relativos de la función son los puntos de abscisas $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$:

$f''(x) = 6x - 4$: $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow$ En $x = \frac{1}{3}$ la función tiene un máximo relativo: $\left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{4}{27}\right)$

$f''(1) = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow$ En $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo: $(1\,,\,0)$

Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$: $f''(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{28}{27}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) = -\infty$

4. *Sabemos que en el plano el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de dos dados es una recta. Pues bien, ocurre que si en lugar de pedir que el cociente de las distancias sea 1, elegimos otro valor fijo, el lugar geométrico pasa a ser una circunferencia.*

a) Comprueba esta afirmación tomando como puntos (!1,0) y (1,0) y un parámetro λ como cociente de las distancias. [1 punto]

b) Da una expresión del centro y del radio de la circunferencia del apartado a) en función de λ. [1 punto]

c) Representa la figura para $\lambda = 2$. [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sea $P(x\,,\,y)$ un punto cualquiera y sean $A(-1,\,0)$ y $B(1,\,0)$ los dos puntos dados. Se tiene:

$$\frac{d(A\,,\,P)}{d(B\,,\,P)} = \lambda \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lambda \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \lambda^2 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = \lambda^2 \cdot \left[(x-1)^2 + y^2\right] \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = \lambda^2 \cdot \left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) \Rightarrow \left(1 - \lambda^2\right)x^2 + \left(1 - \lambda^2\right)y^2 + \left(2 + 2\lambda^2\right)x + 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow$$

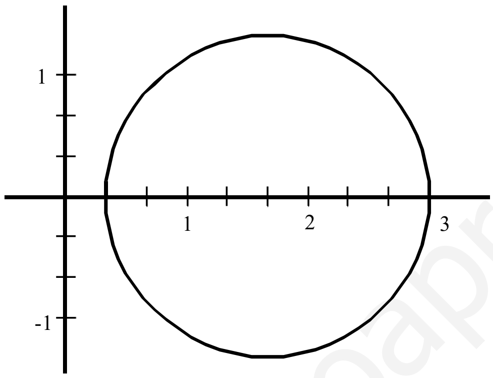
www.yoquieroaprobar.es

$x^2 + y^2 + \frac{2 \cdot (1+\lambda^2)}{1-\lambda^2} x + 1 = 0$ que es, en efecto, la ecuación de una circunferencia (cuyo centro está en el eje OX).

b) Para una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ el centro es el punto $C\left(-\frac{A}{2}\ ,\ -\frac{B}{2}\right)$ y el radio $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$. En este caso: $C\left(-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\ ,\ 0\right)$ y $r = \sqrt{\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 - 1}$

c) Para $\lambda = 2$, la circunferencia tiene su centro en $C\left(\frac{5}{3}\ ,\ 0\right)$ y su radio es $r = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$.

La circunferencia es:



www.yoquieroaprobar.es