

Septiembre 2004

OPCIÓN A

1. Sea el sistema homogéneo de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ x + 2ay - z = 0 \end{cases}$$

- a) Determinar el valor o valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula [1,5 puntos]
b) Resolver el sistema para el valor o valores de a hallados en el apartado anterior [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula el rango de la matriz de los coeficientes debe ser menor que tres, y para ello el único menor de orden tres debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 2a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 - 4a^2 - 2 + a - 2a = 0 \Leftrightarrow -4a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a \cdot (-4a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

b) X Para $a = 0$, la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ las dos

ecuaciones primeras son independientes respecto a las incógnitas x e y . Utilizando $z = \mu$ como parámetro, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 2\mu \\ -y = -\mu \end{cases} \Rightarrow y = \mu, \quad x = \mu, \quad z = \mu$$

X Para $a = -\frac{1}{4}$, la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{4} & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a x e y . Utilizando $z = \lambda$ como parámetro, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 2\lambda \\ -\frac{1}{4}x - y = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2\lambda \\ x + 4y = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 4\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8\lambda - 4\lambda}{4 - 1} = \frac{4\lambda}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda \\ 1 & 4\lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{4\lambda - 2\lambda}{3} = \frac{2\lambda}{3}; \quad z = \lambda$$

2. Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima [1,5 puntos]. Calcular dicha suma [1 punto]

SOLUCIÓN.

Sean x e y los dos sumandos positivos: $e = x + y \Rightarrow y = e - x$

La función que debe ser máxima es: $S = \ln x + \ln(e - x)$. Veamos para que valor de x se maximiza la función:

$$S' = \frac{1}{x} - \frac{1}{e - x} = \frac{e - x - x}{x \cdot (e - x)} = \frac{e - 2x}{ex - x^2} = 0 \Rightarrow e - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{e}{2}$$

$$S'' = \frac{-2 \cdot (ex - x^2) - (e - 2x) \cdot (e - 2x)}{ex - x^2} = \frac{-2 \cdot (ex - x^2) - (e - 2x)^2}{ex - x^2} \Rightarrow f''\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - (e - e)^2}{\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}} = -2 < 0$$

luego para $x = \frac{e}{2}$, $y = \frac{e}{2}$ la suma de los logaritmos neperianos es máxima.

$$\text{La suma es: } S = \ln \frac{e}{2} + \ln \frac{e}{2} = 2 \cdot \ln \frac{e}{2} = 2 \cdot (\ln e - \ln 2) = 2 \cdot (1 - \ln 2) = 2 - \ln 4$$

3. Calcular el área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Consideremos la función diferencia de las dos funciones dadas: $d(x) = x + 2 - x^2$. El área pedida es el área del recinto limitado por esta función diferencia y el eje de abscisas.

$$\text{Los puntos de corte de } d(x) \text{ y } OX \text{ son: } -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{Entonces: } A = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = -3 + 8 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$

4. La recta $x = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2}$ corta a los tres planos coordenados en tres puntos.

Determinar las coordenadas de estos puntos [0,5 puntos], las distancias existentes entre cada par de ellos [1 punto] e indicar cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos [1 punto].

SOLUCIÓN.

$$\text{Escribamos la recta como intersección de dos planos: } x = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1-y \\ 2x = 2-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

a) Puntos de corte con los planos coordenados:

$$\begin{aligned} \text{X Punto de corte con } x=0: & \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=1, z=2 \Rightarrow A(0, 1, 2) \\ \text{X Punto de corte con } y=0: & \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y=0, z = \frac{4}{3} \Rightarrow B\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right) \\ \text{X Punto de corte con } z=0: & \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=-2, z=0 \Rightarrow C(1, -2, 0) \end{aligned}$$

b) Distancias entre los puntos:

$$\text{X } d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 1 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$X \quad d(A, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$X \quad d(B, C) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + (-2-0)^2 + \left(0-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + 4 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

Puesto que $\frac{2\sqrt{14}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3} = \sqrt{14} \Rightarrow d(A, B) + d(B, C) = d(A, C) \Rightarrow$ el punto B se encuentra entre A y C.

Septiembre 2004

OPCIÓN B

1. Determinar una matriz cuadrada X que verifique $AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [2 puntos]. Luego analizar si la matriz X es inversible, y en el caso de serlo calcular su matriz inversa [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+b & 2b \\ a+2c+d & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=2 \\ 2b=-2 \\ a+2c+d=3 \\ b+2d=3 \end{cases} \Rightarrow b=-1, a=\frac{3}{2}, d=2, c=-\frac{1}{4}$$

es decir: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$

X La matriz X es inversible pues: $|X| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \neq 0$. Calculemos X^{-1} :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(X^t) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X^{-1} = \frac{\text{Adj}(X^t)}{|X|} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

2. Sea el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$.

- a) Determinar los coeficientes a , b y c sabiendo que tiene extremos en $x = -1$ y en $x = 1$ y que pasa por el origen de coordenadas [1,5 puntos]
b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$x = -1 \text{ extremo relativo} \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \quad (*)$$

$$x = 1 \text{ extremo relativo} \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \quad (*)$$

$$\text{Sumando las igualdades } (*): 6 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Y como la función pasa por el origen de coordenadas: } f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Por tanto, el polinomio es $x^3 - 3x$

b) La naturaleza de los extremos (máximo o mínimo) depende del signo de la segunda derivada: $f''(x) = 6x$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{en } x = -1 \text{ la función tiene un máximo relativo}$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{en } x = 1 \text{ la función tiene un mínimo relativo.}$$

3. Sea la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

a) Probar que es tangente a uno de los ejes coordenados, indicando a cual [1 punto].

b) Calcular el área encerrada entre la gráfica de la parábola y los dos ejes coordenados [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sólo puede serlo el eje OX. Probémoslo:

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{en } x = 3 \text{ la parábola tiene un mínimo (el vértice).}$$

Además: $f(3) = 9 - 18 + 9 = 0 \Rightarrow$ el punto $(3, 0)$ es un mínimo y pertenece al eje OX $\Rightarrow$ OX es tangente a la parábola en el punto $(3, 0)$

$$b) A = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_0^3 = (9 - 27 + 27) - 0 = 9 \text{ u}^2$$

4. Sea r la recta que pasa por los puntos $(1, 2, 3)$ y $(-1, 0, 2)$.

a) Determinar las ecuaciones de los planos π y σ que son perpendiculares a la recta r y que pasan respectivamente por los puntos $(4, -2, -1)$ y $(2, -1, -3)$ [1,5 puntos]

b) Calcular la distancia que hay entre ambos planos π y σ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Un vector direccional de r es $\vec{u} = (2, 2, 1)$ y un plano perpendicular a r tendrá por ecuación: $2x + 2y + z + D = 0$

$$\text{Como } \pi \text{ pasa por } (4, -2, -1): 8 - 4 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \text{ y por tanto: } \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\text{Como } \sigma \text{ pasa por } (2, -1, -3): 4 - 2 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \text{ y por tanto: } \sigma \equiv 2x + 2y + z + 1 = 0$$

b) Los planos π y σ son paralelos. La distancia entre ambos es:

$$d = \left| \frac{D - D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{-3 - 1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{4}{3}$$