Junio 2004.

OPCIÓN A.

1. *Cuando el año 1800 Beethoven escribe su primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera Sinfonía.*
Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores. [2,5 puntos]
Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos histórico-musicales del examinando.

SOLUCIÓN.

Organicemos temporalmente los datos:

X Año 1800 (Beethoven escribe su primera Sinfonía): Edad de Beethoven: 10x
Edad de Schubert: x

X Pasan y años (Schubert compone la Sinfonía Incompleta): Edad de Beethoven: $10x + y$
Edad de Schubert: $x + y$

Como la suma de las edades de ambos es de 77 años: $10x + y + x + y = 77 \iff 11x + 2y = 77 \quad (1)$

X 5 años más tarde (muere Beethoven): Edad de Beethoven: $10x + y + 5$
Edad de Schubert: $x + y + 5$

Como Schubert tiene los mismos años que Beethoven en 1800: $x + y + 5 = 10x \iff 9x - y = 5 \quad (2)$

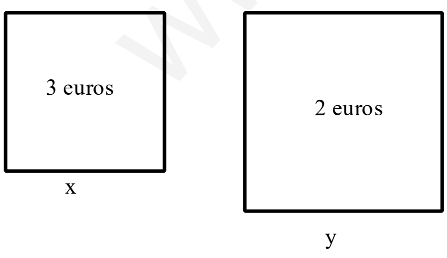
Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 11x + 2y = 77 \\ 9x - y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 11x + 2y = 77 \\ 18x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow 29x = 87 \Rightarrow x = 3$$

Es decir, en 1800 Beethoven tenía 30 años y por tanto nació en 1770 y Schubert tenía 3 años y nació en 1797.

2. *Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado.*
¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro? [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



La función coste es: $C = 3x^2 + 2y^2$

Además: $4x + 4y = 100 \Rightarrow x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - x$ por lo que la función "coste" es:

$$C(x) = 3x^2 + 2(25 - x)^2 = 3x^2 + 1250 - 100x + 2x^2 = 5x^2 - 100x + 1250$$

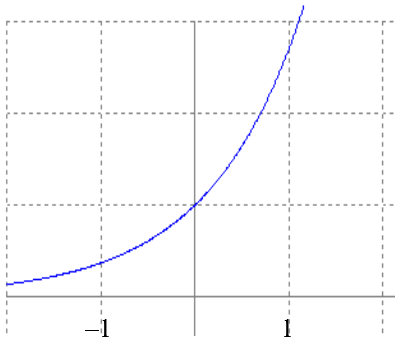
Veamos dónde alcanza esta función su valor mínimo:

$C'(x) = 10x - 100 = 0 \Rightarrow x = 10$ (valor crítico).

$C''(x) = 10 > 0 \Rightarrow$ Para x = 10, el coste es mínimo.

Por tanto, el lado de la chapa de 3 € debe ser de 10 cm y el de la chapa de 2 € debe medir 15 cm.

3. *Calcular el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial* $f(x)=e^x$ *y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas* $x=-1$ *y* $x=1$ [2,5 puntos]



El recinto limitado por la cuerda, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$ es un trapecio rectángulo de base mayor e, base menor $\frac{1}{e}$ y altura 2, por lo que su área es: $S_1=\frac{1}{2}\cdot\left(e+\frac{1}{e}\right)\cdot 2=e+\frac{1}{e}$

El recinto limitado por la función $f(x)=e^x$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$ tiene por área: $S_2=\int_{-1}^{1} e^x\,dx=\left[e^x\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$

El área pedida es: $S=S_1-S_2=e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}\text{ u}^2$

4. *Sean los puntos* $A(2,3,0)$ y $B(-2,1,4)$. *Determinar:*

a) Ecuación del plano π *mediatriz del segmento AB* [0,5 puntos].

b) El volumen del tetraedro formado por π *y los tres planos coordenados* [1 punto].

c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π *que pasa por el origen* [1 punto]

Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

SOLUCIÓN.

a) El vector $\overline{AB}=(-4,\,-2,\,4)$ es un vector característico del plano. Su ecuación es por tanto: $-4x-2y+4z+D=0$.
Como pasa por el punto medio del segmento AB, $M(0,2,2)$: $-4+8+D=0\Rightarrow D=-4$.
Por lo tanto, la ecuación del plano π es: $-4x-2y+4z-4=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+2=0$

b) El tetraedro tiene por vértices el origen O y los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados:

• Con OX: $\begin{cases}2x+y-2z+2=0\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{X}(-1,0,0) \Rightarrow \overline{\mathrm{OX}}=(-1,0,0)$

• Con OY: $\begin{cases}2x+y-2z+2=0\\ x=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{Y}(0,-2,0) \Rightarrow \overline{\mathrm{OY}}=(0,-2,0)$

• Con OZ: $\begin{cases}2x+y-2z+2=0\\ x=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{Z}(0,0,1) \Rightarrow \overline{\mathrm{OZ}}=(0,0,1)$

Por tanto: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overline{\mathrm{OX}},\overline{\mathrm{OY}},\overline{\mathrm{OZ}}\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot 2\right|=\frac{1}{3}\text{ u}^3$

c) La recta está caracterizada por el origen de coordenadas y el vector direccional $\overline{AB}$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x}{-4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$$

Junio 2004.

OPCIÓN B.

1. *Sea el sistema* $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay+z=a \end{cases}$.

Se pide clasificarlo según los valores del parámetro a [1,5 puntos] *y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{array}\right)$. Estudiemos los rangos de ambas matrices:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2-3a-2a=a^2-5a=0 \;\Rightarrow\; a=0 \;,\; a=5$$

• Para $a \neq 0$ y $a \neq 5$: rg A = rg B = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

• Para $a=0$, las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ y según se observa la segunda y tercera filas son linealmente dependientes: rg A = rg B = 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado.

La solución del mismo es: $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \end{cases} \Rightarrow \; \mathrm{x}=5-3\lambda \;,\; y=\lambda \;,\; \mathrm{z}=0$

• Para $a=5$: el menor de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2.

el menor de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de la matriz ampliada es 3.

Por consiguiente, los rangos de ambas matrices son distintos y el sistema es incompatible.

2. *Sea la función* $f(x)=x\,senx$. *Determinar:*
a) El área encerrada entre su gráfica y el eje de abscisas entre los valores $x = 0$ *y* $x = \pi$ [1,5 puntos].
b) El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ *y los dos ejes coordenados* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $\int x\,senx\,dx = \begin{pmatrix} \mathrm{u}=\mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{du}=\mathrm{dx} \\ dv=senx\,dx \Rightarrow v=-\cos x \end{pmatrix} = -x\,\cos x + \int \cos x\,dx = -x\,\cos x + senx$

Luego: $S=\int_0^{\pi} x\,senx\,dx = \left[-x\,\cos x + senx\right]_0^{\pi} = \pi \;\; \mathrm{u}^2$

b) Obtengamos la ecuación de la tangente. Su pendiente es $f'(\pi)=sen\pi+\pi\,\cos\pi=-\pi$ y pasa por el punto $(\pi\,,0)$, luego su ecuación es: $y-0=-\pi\cdot(x-\pi) \Leftrightarrow y=-\pi x+\pi^2$.

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: con OX: $0 = -\pi x + \pi^2 \Rightarrow x = \pi \Rightarrow (\pi , 0)$; con OY: $(0 , \pi^2)$

Como se trata de un triángulo rectángulo de base π y altura π^2 su área es: $S = \frac{1}{2}\pi \cdot \pi^2 = \frac{\pi^3}{2}$ u^2

3. *Sea la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$. Determinar:*
a) El máximo de la función en el intervalo $(0 , \pi)$ [1,5 puntos]
b) Ecuación de las tangentes a la gráfica en los extremos del intervalo anterior [1 punto].

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tag} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$f''(x) = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) = 2\, e^x \cos x \Rightarrow f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\, e^{\frac{3\pi}{4}} \cos\frac{3\pi}{4} < 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ es un máximo relativo. Como $f(0) = f(\pi) = 0$ y la función es continua, alcanza su máximo en $\frac{3\pi}{4}$ dentro del intervalo $(0 , \pi)$

b) Tangente en x = 0: pasa por el punto $(0 , 0)$ y su pendiente es $f'(0) = 1$, por lo que su ecuación es $y = x$.

Tangente en $x = \pi$: pasa por el punto $(\pi , 0)$ y su pendiente es $f'(\pi) = -e^{\pi}$ luego su ecuación es: $y = -e^{\pi}(x - \pi)$

4. *Sea el plano π de ecuación x – 5y + z + 3 = 0 y sean r y s las rectas con ecuaciones*

$$r : x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3} \quad ; \quad s : \frac{x+1}{2} = y = z + 2$$

Determinar:
a) Los puntos de intersección del plano π con cada una de las rectas [1 punto].
b) El área y perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenadas [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) • $P = \pi \cap r$:

Las ecuaciones paramétricas de r son $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ por lo que un punto cualquiera de r tiene por coordenadas $(3 + t \ , \ 2 + 2t \ , \ 4 + 3t)$. El punto común de la recta y el plano debe verificar la ecuación del plano, luego:

$$3 + t - 5(2 + 2t) + 4 + 3t + 3 = 0 \Rightarrow 3 + t - 10 - 10t + 4 + 3t + 3 = 0 \Rightarrow -6t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow P(3 , 2 , 4)$$

• $Q = \pi \cap s$:

Las ecuaciones paramétricas de s son $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases}$ por lo que un punto cualquiera de s es $(-1 + 2t \ , \ t \ , -2 + t)$. El punto de intersección con el plano debe verificar: $-1 + 2t - 5t - 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow Q(-1 , 0 , -2)$

b) Sea el triángulo de vértices O, P y Q. Se tiene: $\overline{OP} = (3 , 2 , 4)$, $\overline{OQ} = (-1 , 0 , -2)$, $\overline{QP} = (4 , 2 , 6)$.

• Perímetro: $\left|\overline{OP}\right| + \left|\overline{OQ}\right| + \left|\overline{QP}\right| = \sqrt{9 + 4 + 16} + \sqrt{1 + 0 + 4} + \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{56}$

• Área: $\frac{1}{2}\left|\overline{OP} \times \overline{OQ}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|-4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}\ u^2$