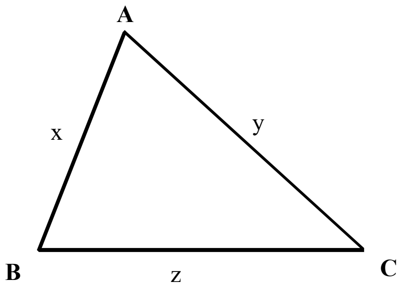
Septiembre 2005

OPCIÓN A

1. *A, B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de A a B. Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de A a C.*
Calcular las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



$$\begin{cases} y+z=3x \\ x+z=2y \\ x+y+z=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=120 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 120 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-120-240}{-6-1-1-2+1-3}=\frac{-360}{-12}=30$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 120 & 1 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-120-360}{-12}=\frac{-480}{-12}=40 \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 120 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-720+120}{-12}=\frac{-600}{-12}=50$$

Por tanto: $d(A,\ B)=30\ \text{kms}$, $d(A,\ C)=40\ \text{kms}$, $d(B,\ C)=50\ \text{kms}$

2. *Sea la función* $f(x)=e^x\,\text{sen}\,x$. *Determinar sus extremos* [1,5 puntos] *y sus puntos de inflexión* [1 punto] *en el intervalo* $[-\pi,\ \pi]$.

SOLUCIÓN.

X Los extremos relativos satisfacen la ecuación $f'(x)=0$:

$$f'(x)=e^x\cdot\text{sen}\,x+e^x\cdot\cos x=0 \Rightarrow e^x(\text{sen}\,x+\cos x)=0 \text{ y como } e^x\neq 0\ \forall x:\ \text{sen}\,x+\cos x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,x=-\cos x \Rightarrow \text{tg}\,x=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Veamos si se trata de máximos o de mínimos:

$f''(x) = e^x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x) = e^x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x + \cos x - \operatorname{sen} x) = 2\, e^x \cos x$

$f''\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) > 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = -\dfrac{\pi}{4}$ la función tiene un mínimo relativo.

$f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \cos \dfrac{3\pi}{4} < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = \dfrac{3\pi}{4}$ la función tiene un máximo relativo.

X Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$: $\quad 2 \cdot e^x \cdot \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$f'''(x) = 2 \cdot \left(e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \operatorname{sen} x\right) = 2 \cdot e^x \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x)$

$f'''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot (0+1) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ la función tiene un punto de inflexión.

$f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cdot (0-1) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función tiene un punto de inflexión.

3. *Sea Ω la región acotada encerrada entre las parábolas $f(x) = x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - x + 6$.*

a) Hallar la superficie de Ω [1,5 puntos].

b) Razonar (no valen comprobaciones con la calculadora) cuál de las dos parábolas está en la parte inferior de la región Ω [1 punto].

SOLUCIÓN.

a) Consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2x^2 + x - 6 = -x^2 + 3x - 2$

El área de la región encerrada entre las dos parábolas es la misma que la encerrada entre la nueva función y el eje OX.

Calculemos los puntos de corte de $h(x)$ con OX : $\quad -x^2 + 3x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

El área será entonces: $\quad \displaystyle\int_1^2 \left(-x^2 + 3x - 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right) =$

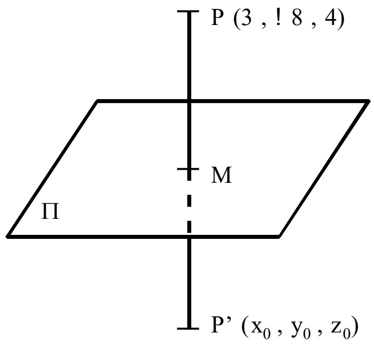
$= -\dfrac{8}{3} + 2 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2} + 2 = 4 - \dfrac{7}{3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{24 - 14 - 9}{6} = \dfrac{1}{6}$ y por tanto: $S(\Omega) = \dfrac{1}{6}\ u^2$

b) En la parte inferior está la función $g(x)$ pues, según el apartado anterior, la función $f(x) - g(x)$ produce una región situada en el semiplano positivo.

4. *Determinar el punto simétrico del $(3, -8, 4)$ respecto del plano $x - 3y + 2z = 7$* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X El vector $\overline{n} = (1, -3, 2)$ es un vector normal al plano dado. Por tanto, podemos obtener la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto dado $(3, -8, 4)$:



$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -8 - 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$ es la ecuación paramétrica de dicha recta

X Podemos ahora obtener las coordenadas del punto M, intersección de la recta y el plano:

$3 + t + 24 + 9t + 8 + 4t = 7 \;\Rightarrow\; 14t = -28 \;\Rightarrow\; t = -2 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; M\left(1,\ -2,\ 0\right)$

X Puesto que M es el punto medio del segmento que tiene por extremos el punto dado y su simétrico:

$$1 = \frac{3 + x_0}{2} \;\Rightarrow\; x_0 = -1 \quad ; \quad -2 = \frac{-8 + y_0}{2} \;\Rightarrow\; y_0 = 4 \quad ; \quad 0 = \frac{4 + z_0}{2} \;\Rightarrow\; z_0 = -4$$

Luego el punto simétrico del dado es: $\quad P'\ \left(-1,\ 4,\ -4\right)$

Septiembre 2005

OPCIÓN B

1. *Estudiar según el valor del parámetro* λ *, el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + z = \lambda^2 \end{cases}$ *y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{array}\right)$

Estudiemos sus rangos, según los valores de λ :

El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 + 1 - \lambda - \lambda - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

Se tiene: X Si $\lambda \neq 1$: $\text{rg } A = \text{rg } M = \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas} \;\Rightarrow\;$ el sistema es compatible determinado

X Si $\lambda = 1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ cuyos rangos respectivos son iguales a 1 y el sistema es compatible indeterminado.

En este caso sólo una de las ecuaciones es independiente: $x + y + z = 1$. Considerando las incógnitas $y = t$ y $z = s$ como parámetros, las soluciones del sistema son: $x = 1 - t - s\ ,\ \ y = t\ ,\ \ z = s$.

2. *Calcular razonadamente el límite de la sucesión* $\dfrac{(n-2)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+4}{n^3+3n^2+3n+1-n^3+3n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+4}{6n^2+2} = \frac{1}{6}$$

3. *Determinar el área encerrada por la gráfica de la función* $f(x)=x^2\,senx$ *y el eje de abscisas entre el origen y el primer punto positivo donde f se anula* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

$$f(x)=x^2\cdot \operatorname{sen}x=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ \operatorname{sen}x=0 \;\Rightarrow\; x=\pi \end{cases}$$

Calculemos una primitiva de la función. Utilizaremos por dos veces el método de integración por partes:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int x^2\cdot \operatorname{sen}x\cdot dx = \left| \begin{array}{l} x^2=u \;\Rightarrow\; 2x\,dx=du \\ \operatorname{sen}x\,dx=dv \;\Rightarrow\; -\cos x=v \end{array} \right| = -x^2\cdot\cos x + 2\left[x\cdot \operatorname{sen}x - \int x\cdot \cos x\cdot dx\right] =$$

$$\left| \begin{array}{l} x=u \;\Rightarrow\; dx=du \\ \cos x\cdot dx=dv \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}x=v \end{array} \right| = -x^2\cdot\cos x + 2x\cdot \operatorname{sen}x + 2\cos x = \left(-x^2+2\right)\cdot\cos x + 2x\cdot \operatorname{sen}x$$

Por tanto: $A=\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \left[\left(-x^2+2\right)\cdot\cos x + 2x\cdot \operatorname{sen}x\right]_0^{\pi} = \left(-\pi^2+2\right)\cdot(-1)+2\pi\cdot 0 - 2\cdot 1 - 0 = \left(\pi^2-4\right)\,u^2$

4. *Sea r la recta intersección de los dos planos* $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

a) Determinar el plano π *que contiene a la recta r y que pasa por el origen de coordenadas* [1,5 puntos]

b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a π *y que pasa por el punto* $(1,\,0,\,1)$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Ecuación del haz de planos que pasan por r: $x+2y-z-3+\lambda\,(2x-y+z-1)=0$

El plano del haz que pasa por el origen de coordenadas es: $-3-\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-3 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x+2y-z-3-6x+3y-3z+3=0 \;\Leftrightarrow\; -5x+5y-4z=0$ que es la ecuación del plano π

b) La recta perpendicular al plano tiene por vector direccional un vector normal al plano: $\overline{n}=(-5,\,5,\,-4)$. Su ecuación normal es: $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{-4}$