Septiembre 2006

OPCIÓN A

1. *La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sean x el número de partidos ganados, y el número de partidos empatados y z el número de partidos perdidos. Se tiene:

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ 3x + y = 70 \\ 2x + y = 50 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 \\ 70 & 1 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{70-50}{3-2} = \frac{20}{1} = 20 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 \\ 3 & 70 & 0 \\ 2 & 50 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{150-140}{1} = 10$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 40 \\ 3 & 1 & 70 \\ 2 & 1 & 50 \end{vmatrix}}{1} = 50 + 120 + 140 - 80 - 150 - 70 = 10$$

es decir, ganó 20 partidos, empató 10 y perdió otros 10 partidos.

2. *Dadas las funciones* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = x^3$*, determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones entre las rectas:*
a) $x = 0$ *y* $x = 1$. [1,25 puntos]
b) $x = 1$ *y* $x = 2$. [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

Consideremos la función diferencia de las dos funciones dadas: $h(x) = x^2 - x^3$.

Calculemos una primitiva de esta función: $\int \left(x^2 - x^3\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

a) $A_1 = \int_0^1 h(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,u^2$

b) $A_2 = \left|\int_1^2 h(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2\right| = \left|\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{7}{3} - \frac{15}{4}\right| = \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{17}{12}\,u^2$

3. *a) Comprobar si* $f(x)=\dfrac{e^x+\text{sen}x}{e^x}$ *tiene un máximo relativo en* $x=\dfrac{\pi}{4}$ [1,25 puntos]

b) *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$ [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

a) En $x=\dfrac{\pi}{4}$ hay un máximo relativo si: $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ y $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$

Se tiene:

$$f(x)=1+\frac{\text{sen}x}{e^x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{\cos x\cdot e^x-\text{sen}\,x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(\cos x-\text{sen}\,x)}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\text{sen}\,x}{e^x}\ \Rightarrow\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=0$$

Por otra parte:

$$f''(x)=\frac{(-\text{sen}\,x-\cos x)\cdot e^x-(\cos x-\text{sen}\,x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(-\text{sen}\,x-\cos x-\cos x+\text{sen}\,x)}{e^{2x}}=\frac{-2\cdot\cos x}{e^x}\ \Rightarrow$$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}<0$ luego $x=\dfrac{\pi}{4}$ cumple las condiciones necesaria y suficiente para ser un máximo relativo.

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=1^\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{6}\cdot\frac{6}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x-1}{6}}\right]^{\frac{6x^2}{x^2+2x-3}}=e^6$$

4. *¿Para qué valores del parámetro m la recta* $x=y+1=\dfrac{11-mz}{3}$ *es paralela al plano* $2x+y+z=9$? *Determinar el punto de intersección de la recta y el plano para m = 2.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X La ecuación continua de la recta es $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-\frac{11}{m}}{-\frac{3}{m}}$. Un vector direccional de la misma $\bar{u}=\left(1,\ 1,\ -\dfrac{3}{m}\right)$ debe ser perpendicular al vector $\bar{n}=(2,\ 1,\ 1)$ normal al plano dado y, por tanto, su producto escalar debe ser 0:

$$\bar{u}\cdot\bar{n}=0\ \Rightarrow\ 2+1-\frac{3}{m}=0\ \Rightarrow\ 3m-3=0\ \Rightarrow\ m=1$$

X Para $m=2$, la ecuación paramétrica de la recta es: $\begin{cases}x=t\\ y=-1+t\\ z=\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}t\end{cases}$. Haciendo que el punto $\left(t,\ -1+t,\ \dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}t\right)$

esté en el plano, obtendremos el punto de intersección: $2t-1+t+\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}t=9\ \Rightarrow\ 4t-2+2t+11-3t=18\ \Rightarrow$

$3t = 9 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow$ el punto buscado es: $(3,\ 2,\ 1)$

Septiembre 2006.

OPCIÓN B

1. *Teniendo en cuenta que* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$ *, calcular el valor del siguiente determinante, sin desarrollarlo,*

$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} \right) = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \right) = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 = -21$$

2. *a) La función* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ *no está definida para* $x = 0$. *Definir* $f(0)$ *de modo que* $f(x)$ *sea una función continua en ese punto.* [1,25 puntos]

b) Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$ *, calcular* $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx$ [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

Para que la función sea continua en $x = 0$, debe ser: $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Se tiene: $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, debe ser $f(0) = \dfrac{1}{2}$, es decir, la función debe estar definida así: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$. Se tiene entonces:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx = \int \frac{\ln t}{t}\, dt = \int \ln t \cdot d(\ln t) = \frac{1}{2}\ln^2 t + C = \frac{1}{2}\ln^2 (\ln\ x) + C$$

3. *Sea* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función polinómica de grado menor o igual a tres que tiene un mínimo relativo en* $(0,\ 0)$ *y un máximo relativo en* $(2,\ 2)$*. Calcular la expresión de dicha función.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se tiene: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Si la función tiene un mínimo relativo en $(0,\ 0)$, debe ser: $f(0) = 0$ (1) y $f'(0) = 0$ (2)
Si la función tiene un máximo relativo en $(2,\ 2)$, debe ser: $f(2) = 2$ (3) y $f'(2) = 0$ (4)

De la condición (1): $d = 0$
De la condición (2): $c = 0$
De la condición (3): $8a + 4b = 2$
De la condición (4): $12a + 4b = 0 \Rightarrow b = -3a$
y sustituyendo en la condición (3): $8a - 12a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$

Por tanto la función que se ajusta a las condiciones expresadas es: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

4. *a) Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores* $\vec{u} = (2,\ 0,\ 9)$, $\vec{v} = (3, -1,\ 2)$, $\vec{w} = (5,\ -1,\ 4)$.
[0,75 puntos]

b) Dados los planos: $\pi_1:\ 3x - y + 2z + 1 = 0$ *y* $\pi_2:\ 2x + y - 5z - 1 = 0$*, determinar el ángulo que forman.*
[1,75 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 27 + 45 + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

b) Los vectores $\bar{n}_1 = (3,\ -1,\ 2)$ y $\bar{n}_2 = (2,\ 1,\ -5)$ son vectores normales a los planos π_1 y π_2, respectivamente. De los dos ángulos distintos que forman dos planos que se cortan, se define como ángulo de los planos al menor de ellos, es decir al agudo. Sea α el ángulo que forman los dos planos, que es el mismo que el que forman sus vectores normales. Se tiene:

$$|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2| = |\bar{n}_1|\ |\bar{n}_2| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|6 - 1 - 10|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{420}} \cong 0{,}243975 \Rightarrow$$

$\alpha = 75^{\circ}\ 52'\ 43''$