

1. ÁLGEBRA.

Opción A

(2,5 puntos) Hallar una matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 tal que

$$A^{-1} X A = B \quad \text{siendo} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

$$A^{-1} X A = B \Leftrightarrow X A = A \cdot B \Leftrightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj } A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{(\text{Adj } A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}$$

Opción B

a) (1 punto) Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) (1,5 puntos) Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 2 \end{cases}$ que además satisface que la suma de los valores correspondientes a cada una de las incógnitas es 4.

SOLUCIÓN.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{(4)}{=} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b+a & c-b \end{vmatrix} \stackrel{(5)}{=} (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Propiedades utilizadas:

(1) $C_2 - C_1$, $C_3 - C_1$

(3) Sacar factor común en ambas columnas

(5) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila

(2) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila

(4) $C_2 - C_1$

b) Se debe añadir a las dos ecuaciones dadas la ecuación $x + y + z = 4$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Para resolverlo, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4+3+18-12-2-9} = \frac{6+72-48-4}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2+12-6-36}{2} = \frac{-28}{2} = -14$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{16+4-2-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Por tanto: $\boxed{x = 13, y = -14, z = 5}$

2. GEOMETRÍA

Opción A

Se consideran la recta r y los planos π_1 y π_2 siguientes: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}, \quad \begin{cases} \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

- a) (1,25 puntos) Determinar la posición relativa de los dos planos.
b) (1,25 puntos) Calcular la distancia de r a π_2 .

SOLUCIÓN.

- a) $\vec{n}_1 = (-3, 2, -1)$ es un vector perpendicular a π_1 . $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$ es un vector perpendicular a π_2 .

Como las coordenadas de $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ no son proporcionales, tienen distinta dirección $\Rightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan en una recta

Como además: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -3 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow$ los planos son perpendiculares.

- b) Un vector direccional de la recta r es: $\vec{u} = (-3, 2, -1)$ que coincide con $\vec{n}_1$. Por tanto: $\vec{u} \perp \vec{n}_2 \Rightarrow$ la recta es paralela al plano.

Un punto de la recta es $P(2, 1, 4)$ por lo que:

$$d(r, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \left| \frac{3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{12}} \right| = \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

Opción B

- a) (1 punto) Obtener los valores de α y β para los cuales el vector de componentes $(\alpha, \beta, 0)$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y

es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$.

- b) (0,75 puntos) Estudiar si los vectores $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, -1)$ son linealmente independientes.

- c) (0,75 puntos) Calcular el ángulo que forman dos rectas cuyos vectores direccionales son $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente.

SOLUCIÓN

a) $|(\alpha, \beta, 0)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 2 \quad (*)$

Vector direccional de la recta: $\vec{u} = (-1, -1, 0) // (1, 1, 0)$.

$(\alpha, \beta, 0) \perp \vec{u} \Rightarrow (\alpha, \beta, 0) \cdot (1, 1, 0) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \quad (*)$

De las igualdades (*): $\alpha = -\beta \Rightarrow (-\beta)^2 + \beta^2 = 2 \Rightarrow 2\beta^2 = 2 \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \text{ml}$

Por tanto: $\boxed{\alpha = -1, \beta = 1}$ o $\boxed{\alpha = 1, \beta = -1}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ y } \vec{c} \text{ son linealmente independientes}$

c) $\cos \gamma = \frac{\left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} \right|}{\left| \frac{1-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \right|} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$ es decir, las rectas son perpendiculares.

3. ANÁLISIS

Opción A

1. Sea $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

(a) (1 punto) Calcular el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$.

(b) (0,5 puntos) Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje OY.

(c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

SOLUCIÓN.

(a) Se trata de una función continua $\forall x$ por lo que su máximo y su mínimo absolutos lo tendrán en alguno de sus máximos o mínimos relativos o cuando $x \rightarrow \pm \infty$.

Estudiemos, en primer lugar las tendencias de la función: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} = 1$

Estudiemos ahora los máximos y mínimos relativos y el valor de la función en ellos:

$$f'(x) = \frac{2(2x-1) \cdot 2 \cdot (4x^2+1) - (2x-1)^2 \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(2x-1)[4x^2+1 - (2x-1) \cdot 2x]}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(2x-1)(4x^2+1 - 4x^2 + 2x)}{(4x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{Puntos críticos})$$

$$f''(x) = \frac{[4 \cdot [2(2x+1) + 2(2x-1)] \cdot (4x^2+1)^2] - 4(2x-1)(2x+1) \cdot 2(4x^2+1) \cdot 8x}{(4x^2+1)^4} \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \\ f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Luego en $x = \frac{1}{2}$ la función tiene un mínimo relativo de valor $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ y en $x = -\frac{1}{2}$ tiene un máximo relativo de valor $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.

Por consiguiente, el máximo absoluto de la función se alcanza en $x = -\frac{1}{2}$ y es igual a 2 y el mínimo absoluto se tiene en $x = \frac{1}{2}$ y es igual a 0.

(b) La función es simétrica respecto a OY si $f(-x) = f(x)$:

$$f(-x) = \frac{[2(-x)-1]^2}{4(-x)^2+1} = \frac{(-2x-1)^2}{4x^2+1} = \frac{(2x+1)^2}{4x^2+1} \neq f(x) \Rightarrow \text{la función no es simétrica respecto a OY}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{4x}{4x^2 + 1}\right) dx = [x]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{8x}{4x^2 + 1} dx = 1 - \frac{1}{2} [\ln(4x^2 + 1)]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 1) = 1 - \ln \sqrt{5} = \ln e - \ln \sqrt{5} = \ln \frac{e}{\sqrt{5}} = \boxed{\ln \frac{e\sqrt{5}}{5}} \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{(a) (1,5 puntos) Razonar si para } F(x) = \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4} \text{ se satisface que } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$$

$$\text{(b) (1 punto) Calcular } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x + 2} \right)$$

SOLUCIÓN.

$$\text{(a) Calculemos } F(x) = \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4} = \frac{\left[\frac{1}{3} t^3\right]_0^{x^2}}{x^4} = \frac{\frac{1}{3} x^6}{x^4} = \frac{1}{3} x^2 \Rightarrow F'(x) = \frac{2}{3} x$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} x^2 \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} x \right) = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x + 2} \right) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x + 2} \right) \left(\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2} \right)}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 1 - \cancel{4x^2} + 3x - 2}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x + 2x} = \boxed{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Opción B

1. Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

(a) (1,75 puntos) Estudiar su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

(b) (0,75 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 f(x+1) - f(x)]$

SOLUCIÓN.

(a) X Por tratarse de una función racional: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

X Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

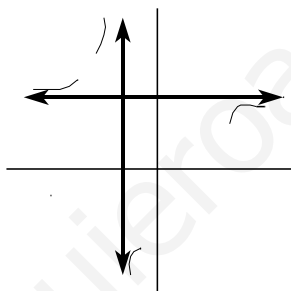
$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \Rightarrow \text{La función es creciente en todo su dominio}$$

X Asíntotas verticales: $x = -1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1} = \infty$.

Además: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = -\infty$

X Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ es una asíntota horizontal de la función.

Se tiene:



(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \cdot \frac{2(x+1)}{x+1+1} - \frac{2x}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3 + 2x^2}{x+2} - \frac{2x}{x+1} \right] = \infty - 2 = \infty$

2. (2,5 puntos) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por alarmas de dos tipos, A ó B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. Estudiar cuántas alarmas de cada tipo deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad.

SOLUCIÓN.

Sean x el número de alarmas del tipo B y $9-x$ el número de alarmas del tipo A que conviene instalar.

La función “seguridad” es: $S(x) = \frac{1}{10} (9-x) x^2 = \frac{1}{10} (9x^2 - x^3)$. Veamos para qué valor de x alcanza su máximo:

$$S'(x) = \frac{1}{10} (18x - 3x^2) = 0 \Rightarrow x(18 - 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$S''(x) = \frac{1}{10} (18 - 6x) \Rightarrow \begin{cases} S''(0) > 0 \Rightarrow \text{la seguridad es mínima} \\ S''(6) < 0 \Rightarrow \text{la seguridad es máxima} \end{cases}$$

Por lo tanto, deben instalarse 3 alarmas del tipo A y 6 del tipo B.