1. ÁLGEBRA

Opción A

a) *(1,5 puntos)* Sean A, B, I las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Estudiar si existe algún valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A-\lambda I)^2=B$.

b) *(1 punto)* Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) $$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2&-2\lambda+1&-2\lambda\\-2\lambda+1&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Igualando, por ejemplo, los elementos a_{13}: $-2\lambda=-4\ \Rightarrow\ \boxed{\lambda=2}$.

Ahora basta comprobar que para $\lambda=2$ los restantes valores de ambas matrices son iguales.

b) $$\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&1/2\\4&4&12\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}4\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&2/4\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}4\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=\boxed{1}$$

Propiedades aplicadas: (1) $|A|=|A^t|$ (2) y (3) Extraer el factor común ¼ de la 2ª fila y 4 de la 3ª fila

Opción B

(2,5 puntos) Dado el sistema $\begin{cases}x+3y-az=4\\-ax+y+az=0\\-x+2ay=a+2\\2x-y-2z=0\end{cases}$

Discutirlo según los valores de a, y resolverlo cuando sea compatible.

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-a&4\\-a&1&a&0\\-1&2a&0&a+2\\2&-1&-2&0\end{array}\right)$.

La matriz de los coeficientes A tiene un rango máximo de 3 mientras que la matriz ampliada B puede tener rango 4. Empecemos estudiando para qué valores del parámetro *a* la matriz ampliada tiene rango 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ 0 & 1+3a & a-a^2 & 4a \\ 0 & 2a+3 & -a & a+6 \\ 0 & -7 & -2+2a & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+3a & a-a^2 & 4a \\ 2a+3 & -a & a+6 \\ -7 & 2a-2 & -8 \end{vmatrix} = \qquad \boxed{(1):\ \begin{array}{l} F_2 + aF_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{array}}$$

$$= 8a(1+3a) + 4a(2a+3)(2a-2) - 7(a-a^2)(a+6) - 28a^2 + 8(2a+3)(a-a^2) - (1+3a)(2a-2)(a+6) =$$

$$= 8a + \cancel{24a^2} + \cancel{16a^3} - \cancel{16a^2} + 24a^2 - \cancel{24a} - 7a^2 - 42a + 7a^3 + 42a^2 - 28a^2 + \cancel{16a^2} - \cancel{16a^3} + \cancel{24a} - \cancel{24a^2} - 2a^2 - 10a + 12 -$$
$$-6a^3 - 3a^2 + 36a = a^3 - a^2 + 8a + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \ , \ a = -3$$

	1	!1	!8	12
2		2	2	!12
	1	1	!6	0

$$a^2 + a - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

X Por tanto, para $a \neq 2$ y $a \neq -3$: $\text{rg } B = 4$ y $\text{rg } A \leq 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

X Para $a = 2$: las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Se observa que $F_4 = -F_2$ por lo que la cuarta ecuación puede desecharse.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de A y de B es como mínimo 2. Orlamos el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 6 - 2 - 8 = 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 32 + 4 + 24 = 0 \Rightarrow \text{rg } B = 2$$

$\Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } B = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado

Para resolverlo consideremos solo las dos primeras ecuaciones (son linealmente independientes) y la incógnita $\boxed{z = \lambda}$ como un parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 + 2\lambda \\ -2x + y = -2\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 6y = 8 + 4\lambda \\ -2x + y = -2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 7y = 8 + 2\lambda \Rightarrow \boxed{y = \frac{8+2\lambda}{7}} \Rightarrow x = 4 + 2\lambda - \frac{24+6\lambda}{7} = \boxed{\frac{4+8\lambda}{7}}$$

X Para $a = -3$: las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 9 - 54 + 3 - 18 = -60 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } B = 3 =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Resolvamos el sistema $\left.\begin{array}{l} x+3y+3z=4 \\ 3x+y-3z=0 \\ -x-6y \quad =-1 \end{array}\right\}$ por la regla de Cramer: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}}{-60} = \dfrac{9+3-72}{-60} = \boxed{1}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-60} = \dfrac{-9+12-3}{-60} = \boxed{0}$; $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix}}{-60} = \dfrac{-1-72+4+9}{-60} = \dfrac{-60}{-60} = \boxed{1}$

2. GEOMETRÍA

Opción A

Considerar la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x+4y+4z=5$.

a) *(1 punto)* Estudiar la posición relativa de r y π .
b) *(1,5 puntos)* Calcular la ecuación implícita de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a r.

SOLUCIÓN.

a) Vector direccional de la recta r : $\vec{u} = (2, -5, 4)$. Vector normal al plano π : $\vec{n} = (2, 4, 4)$
Como $\vec{u} \cdot \vec{n} = 4-20+16 = 0 \Rightarrow$ la recta es paralela al plano o está contenida en él.
Un punto de la recta es $P(1, -5, -3)$. Veamos si está también en el plano: $2-20-12 \neq 5 \Rightarrow$ el punto no pertenece al plano y, por tanto, la recta y el plano son paralelos

b) El plano π_1 está determinado por un punto de r, por ejemplo $P(1, -5, -3)$, un vector direccional de r, por ejemplo $\vec{u} = (2, -5, 4)$, y un vector normal a π, por ejemplo $\vec{n} = (2, 4, 4) \approx (1, 2, 2)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -18(x-1)+9(z+3)=0 \Leftrightarrow -18x+18+9z+27=0 \Leftrightarrow -18x+9z+45=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x-z-5=0}$$

Opción B

a) *(1,25 puntos)* Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π .

b) *(1,25 puntos)* Hallar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.

SOLUCIÓN.

a) La recta está determinada por el origen y por un vector normal al plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \boxed{x=y=z}$$

El punto de corte de la recta y el plano es: $x+x+x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow x=y=z=1$ es decir: $\boxed{Q(1,1,1)}$.

b) Un punto de la recta es $X(\lambda, 3-\lambda, 1+2\lambda)$.

$$d(P,X)=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2+(1+2\lambda-2)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1+9-6\lambda+\lambda^2+1-4\lambda+4\lambda^2=5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\lambda^2-12\lambda+6=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \text{el punto es: } \boxed{X(1,2,3)}$$

3. ANÁLISIS

Opción A

1. Sea
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x \to \log\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}$$

(a) *(0,75 puntos)* Calcular el dominio de $f(x)$.
(b) *(0,75 puntos)* Estudiar si $f(x)$ es una función par.
(c) *(1 punto)* Calcular las asíntotas de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

Modifiquemos el aspecto de la función: $f(x)=\log\sqrt[x]{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}$

(a) Las condiciones que deben verificarse para que $f(x)$ sea calculable son:

$$\left.\begin{array}{c} x\neq 0 \\ 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x\neq 0 \\ x>-1 \\ x<1 \end{array}\right\} \Rightarrow D(f)=(-1,1)-\{0\}=(-1,0)\cup(0,1)$$

(b) La función es par si se verifica: $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=\frac{\log(1-x)-\log(1+x)}{-x}=\frac{-\log(1-x)+\log(1+x)}{x}=\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}=f(x) \Rightarrow \text{la función es par}$$

(c) El dominio de la función imposibilita que pueda tener asíntotas horizontales ni oblicuas.
Las posibles asíntotas verticales estarán en $x=0$, $x=-1$, $x=1$. Comprobemos si lo son:

X $x=0$: $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\ln 10}+\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{\ln 10}}{1}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{\ln 10}\approx 0{,}87 \Rightarrow x=0 \text{ no es asíntota vertical de la función.}$$

X $x=-1$ (caso de ser asíntota vertical lo sería solo por la derecha): $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}=$

$$=\frac{\log 0^+-\log 2}{-1^+}=+\infty \Rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical de la función}$$

X $x=1$ (caso de ser asíntota vertical lo sería solo por la izquierda): $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}=$

$$=\frac{\log 2-\log 0^+}{1^-}=+\infty \Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical de la función.}$$

2. (a) *(1,25 puntos)* Dada $F(x)=\int_0^x t\,\mathrm{sen}(t)\,dt$, estudiar si $x=\pi$ es una raíz de $F'(x)$.

(b) (1,25 puntos) Calcular el valor de $\alpha \in$ ¡ para el cual $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=1$

SOLUCIÓN.

(a) $F(x)=\int_0^x t\,\mathrm{sen}(t)\,dt=\left|\begin{array}{ccc} u=t & \Rightarrow & du=dt \\ dv=\mathrm{sen}(t)\,dt & \Rightarrow & v=-\cos t\end{array}\right|=\left[-t\cdot\cos t+\int\cos t\,dt\right]_0^x=$

$$=\left[-t\cdot\cos t+\mathrm{sen}\,t\right]_0^x=-x\cdot\cos x+\mathrm{sen}\,x \quad\Rightarrow\quad F(x)=-x\cdot\cos x+\mathrm{sen}\,x \quad\Rightarrow$$

$$F'(x)=\cancel{-\cos x}+x\cdot\mathrm{sen}\,x+\cancel{\cos x}=x\cdot\mathrm{sen}\,x \quad\Rightarrow\quad F'(\pi)=\pi\cdot\mathrm{sen}\,\pi=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pi \text{ es una raíz de } F'(x).$$

(b) Si $\alpha=0$ el límite será $1^0=1$ lo que cumple la condición.

Si $\alpha\neq0$ se trata de una indeterminación 1^∞ .Veamos si algún $\alpha\neq0$ también cumple la condición:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=1^\infty=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}-1\right]\cdot\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1-n^2-n+2}{n^2+n-2}\right)\cdot\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+3}{n^2+n-2}\right)\cdot\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=$$

$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\alpha n^4+3\alpha n^3+3n+3}{n^4+n^3-3n^2-n+2}}$ y para que el límite sea igual a 1 el exponente debe tender a 0 y para ello $\alpha=0$.

Por lo tanto la única solución es $\boxed{\alpha=0}$.

Opción B

1. Sean las funciones $f:$ ¡ $\to$ ¡ , $x\to x^3$; $g:$ ¡ $\to$ ¡ , $x\to|x|$; $h:$ ¡ $\to$ ¡ , $x\to\mathrm{sen}(x)$

(a) *(0,75 puntos)* Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de $f(x)$

(b) *(0,75 puntos)* Calcular la derivada de $(f\,o\,h)(x)$.

(c) *(1 punto)* Obtener el área del recinto limitado por f y g entre $x=0$ y $x=1$.

SOLUCIÓN.

(a) $f(x)=x^3 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2 \quad\Rightarrow\quad f''(x)=6x$

X Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$ y como $f'(x)>0\ \forall x \Rightarrow$ la función es creciente $\forall x$.

X $f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$ (posible punto de inflexión). Como $f'''(x)=6\neq0 \Rightarrow$ En $x=0$ la función tiene un punto de inflexión: $(0,0)$.

(b) $(f\,o\,h)(x)=f\left[h(x)\right]=f\left[\mathrm{sen}\,x\right]=\mathrm{sen}^3x \quad\Rightarrow\quad (f\,o\,h)'(x)=3\,\mathrm{sen}^2x\cos x$

(c) En el intervalo $[0,1]$: $f(x)=x^3$ y $g(x)=x$.

$$S = \left| \int_0^1 \left(x^3 - x\right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \boxed{\frac{1}{4}\, u^2}$$

2. *(2,5 puntos)* Encontrar el valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x/2, & x < 2 \\ x^2 + kx, & x \geq 2 \end{cases}$ es continua. Estudiar si su derivada es una función continua.

SOLUCIÓN.

X Puesto que las funciones definidas en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$ son continuas por ser polinómicas, el único punto de posible discontinuidad sería $x = 2$. Para que la función sea continua también en $x = 2$ debe ocurrir:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \iff \lim_{x \to 2^-} \left(6 - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to 2^+} \left(x^2 + kx\right) \iff 5 = 4 + 2k \iff \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

X Para $k = \frac{1}{2}$: $\quad f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{1}{2}x, & x < 2 \\ x^2 + \frac{1}{2}x, & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x < 2 \\ 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$f'(x)$ es continua en $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$. Veamos si lo es en $x = 2$:

a) $\quad \exists\, f'(2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f'(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f'(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f'(x) \Rightarrow \boxed{f'(x) \text{ es discontinua en } x = 2}$$