

1. ÁLGEBRA.

Opción A

a) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de orden 2. Hallar la relación entre los parámetros a , b y c para que se verifique que $A^{-1} = 2I - A$.

b) [1 punto] Calcular, en función de los valores del parámetro k , el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) $A^{-1} = 2I - A \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A = 2I \cdot A - A^2 \Leftrightarrow I = 2A - A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix}$$

Se tiene: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -bc & 2c-ab-c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ab = -1 \\ ac = 0 \\ bc = 0 \\ 2c - ab - c^2 = 1 \end{cases}$

De la primera condición se sigue que a y b son distintos de cero, luego $c = 0$ (segunda y tercera condiciones). Para $c = 0$, la cuarta condición vuelve a ser $ab = -1$.

Por tanto, deben ser: $ab = -1$, $c = 0$.

b) Estudiemos el orden del mayor menor no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{vmatrix} = k - 1 - 30 - 5 + 3 + 2k = 3k - 33 = 0 \Rightarrow k = 11$

Por tanto: $\text{C Si } k \neq 11: \text{ rg } B = 3$

$\text{C Si } k = 11: \text{ rg } B = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 \neq 0$

Opción B

a) [1,25 puntos] Resolver el siguiente determinante sin utilizar la regla de Sarrus: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] Para $M = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, calcular M^n con $n \in \mathbb{Z}$.

SOLUCIÓN.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & -a & b \\ c & -a & b \end{vmatrix} = 0$ pues tiene dos filas iguales

b) $M^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow M^3 = M^2 \cdot M = M \Rightarrow M^4 = M^2 \cdot M^2 = I \Rightarrow \dots$

Por tanto: $M^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ es par} \\ M & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

2. GEOMETRÍA

Opción A

- a) [1,5 puntos] Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos A (5,0,1) y B (4,1,0) y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$.
- b) [1 punto] Estudiar si los vectores $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ y $\vec{w} = (2, -2, 1)$ son linealmente independientes.

SOLUCIÓN.

a) Para calcular la ecuación del plano necesitamos un punto (por ejemplo, el A) y dos vectores (el \vec{AB} y el vector direccional de la recta r).

∩ Obtengamos dos puntos P y Q de r para obtener un vector direccional de la recta: \vec{PQ}

$$\begin{cases} x - 2y = -3z \\ 2x + y = 5 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3z \\ 4x + 2y = 10 + 2z \end{cases} \Rightarrow 5x = 10 - z \Rightarrow x = 2 - \frac{z}{5}, \quad y = 5 + z - 2x = 5 + z - 4 + \frac{2z}{5} = 1 + \frac{7z}{5}$$

Elijamos dos valores para z: $\begin{array}{l} \text{para } z = 0: \quad x = 2, \quad y = 1 \Rightarrow P(2, 1, 0) \\ \text{para } z = 5: \quad x = 1, \quad y = 8 \Rightarrow Q(1, 8, 5) \end{array} \Rightarrow \vec{PQ} = (-1, 7, 5)$

∩ La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - 25 - 7z + 7 + y + z - 1 + 5y + 7x - 35 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12x + 6y - 6z - 54 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 9 = 0$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

Opción B

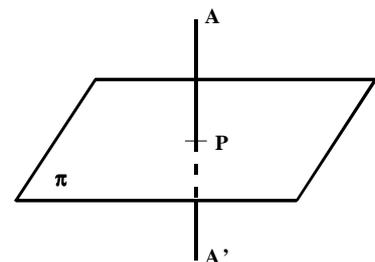
- a) [1,5 puntos] Hallar el punto simétrico de A (2,0,1) respecto del plano $\pi \equiv x + 2y + z = 2$.
- b) [1 punto] Obtener las ecuaciones de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ en forma paramétrica y en forma continua.

SOLUCIÓN

a) ∩ Calculamos la ecuación de la recta AA' perpendicular a π que pasa por A:

Un vector direccional de la recta es el vector normal al plano $\vec{n} = (1, 2, 1)$

Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta es: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$



∩ Obtengamos las coordenadas del punto P de intersección de la recta y el plano:

$$2 + t + 4t + 1 + t = 2 \Rightarrow 6t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{11}{6}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{5}{6} \text{ es decir: } P\left(\frac{11}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

∩ Y como P es el punto medio del segmento AA':

$$\frac{11}{6} = \frac{2+x}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{3}; \quad -\frac{1}{3} = \frac{0+y}{2} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}; \quad \frac{5}{6} = \frac{1+z}{2} \Rightarrow z = \frac{2}{3} \text{ luego: } A'\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

b) Para hacerlo, obtengamos un punto y un vector direccional o lo que es equivalente, dos puntos de la recta:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 - z \\ x - y = 1 + 2z \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 3x = 4 + z \Rightarrow x = \frac{4+z}{3}; \quad y = x - 1 - 2z = \frac{4+z}{3} - 1 - 2z = \frac{1-5z}{3}$$

y dando valores a z: Para $z = -1$: $x = 1$, $y = 2$ es decir $P(1, 2, -1)$

Para $z = 2$: $x = 2$, $y = -3$ es decir $Q(2, -3, 2)$

Como punto, utilizaremos $P(1, 2, -1)$; y como vector direccional $\overrightarrow{PQ} = (1, -5, 3)$.

∩ La ecuación paramétrica es:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \text{ y la ecuación continua: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{3}$$

3. ANÁLISIS

Opción A

1. Sean $f(x) = \cos(3x-1)$ y $h(x) = \sin^2(x)$.

a) [0,5 puntos] Calcular $g(x) = (h \circ f)(x)$.

b) [0,5 puntos] Comprobar si $g(x)$ es una función par.

c) [1,5 puntos] Obtener $g'(x)$ y estudiar si es cierto que $g'(1/3) = 0$.

SOLUCIÓN.

a) $g(x) = (h \circ f)(x) = h[f(x)] = h[\cos(3x-1)] = \sin^2[\cos(3x-1)]$

b) $g(-x) = \sin^2[\cos(-3x-1)] = \sin^2[\cos(3x+1)] \neq g(x) \Rightarrow$ la función no es par

c) $g'(x) = 2 \cdot \sin[\cos(3x-1)] \cdot \cos[\cos(3x-1)] \cdot [-\sin(3x-1)] \cdot 3 =$

$$= -6 \cdot \sin[\cos(3x-1)] \cdot \cos[\cos(3x-1)] \cdot [\sin(3x-1)]$$

$$g'(1/3) = -6 \cdot \sin[\cos(1-1)] \cdot \cos[\cos(1-1)] \cdot [\sin(1-1)] = 0 \text{ puesto que } \sin 0 = 0$$

2. Sea $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}$

a) [0,5 puntos] Calcular su dominio.

b) [0,75 puntos] Encontrar los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX y estudiar si la función es creciente en el intervalo $(0, 1)$.

- c) [0,5 puntos] Obtener $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2}$
d) [0,75 puntos] Hallar $\int_{-1}^1 f(x) dx$

SOLUCIÓN.

a) $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x^3 + 2x^2}{x+2} \geq 0 \right\}$

$$\frac{x^3 + 2x^2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x+2)}{x+2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\} \quad \text{luego } D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

b) $C \begin{cases} y = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}} = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$

Y como $x = -2$ no forma parte del dominio, el único punto de corte es el $(0, 0)$.

$$C \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \frac{(3x^2 + 4x)(x+2) - (x^3 + 2x^2)}{(x+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \frac{3x^3 + 6x^2 + 4x^2 + 8x - x^3 - 2x^2}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \frac{2x^3 + 8x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

En el intervalo $(0, 1)$: $x^3 + 2x^2 > 0$
 $x + 2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
 $x^3 + 4x^2 + 4x > 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{(x+2)^3}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3}} = 1$

d) Calculemos una primitiva de $f(x)$:

$$\int \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}} dx = \int \sqrt{\frac{x^2(x+2)}{x+2}} dx = \int \sqrt{x^2} dx = \begin{cases} \int (-x) dx = -\frac{x^2}{2} & \text{para } x < 0 \\ \int x dx = \frac{x^2}{2} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto: $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$

Opción B

1. a) [1,25 puntos] Calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) dx$
 b) [1,25 puntos] Sea $f(x) = e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcular $f^{(n)}(x) - a^n f(x)$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada n-ésima de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos una primitiva: $\int \cos^3(x) dx = \int \cos^2(x) \cdot \cos(x) \cdot dx = \int (1 - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) \cdot dx =$
 $= \int \cos(x) dx - \int \sin^2(x) \cdot d(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x)$. Como la función no se anula en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) dx = \left[\sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x) \right]_0^{\pi/2} = \left(\sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin 0 - \frac{1}{3} \sin^3 0 \right) = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3}$$

b) Tenemos: $f'(x) = a \cdot e^{ax}$; $f''(x) = a^2 \cdot e^{ax}$; ... ; $f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax}$.

Y por tanto: $f^{(n)}(x) - a^n f(x) = a^n \cdot e^{ax} - a^n \cdot e^{ax} = 0$

2. a) [1,25 puntos] Sea $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)^{1/x} & x < 0 \\ \frac{x^4 + 2x + a}{x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$. Estudiar para qué valores del parámetro a esta función es

continua en $x = 0$.

b) [1,25 puntos] Entre los números cuya suma es 36, encontrar aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

SOLUCIÓN.

a) Puesto que la función está definida en $x = 0$, para que sea continua debe ocurrir que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x + a}{x + 1} \Leftrightarrow (1)$$

Calculemos $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^{1/x} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1 - 1) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x} = e^0 = 1$ y por tanto: (1) $\Leftrightarrow 1 = a$

b) Sean los números: x y $36 - x$. La función $f(x) = x^2 + (36 - x)^2$ debe ser mínima:

$$f(x) = x^2 + 1296 - 72x + x^2 = 2x^2 - 72x + 1296 \Rightarrow f'(x) = 4x - 72 = 0 \Rightarrow x = 18$$

Y como $f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow$ la función es mínima para $x = 18$.

Por tanto, los números buscados son: 18 y 18.