

**1. ÁLGEBRA**

**Opción A**

a) [1,5 puntos] Discutir y resolver en función de los valores del parámetro  $m$  el sistema lineal 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + m^2y + m^2z = 1 \\ mx + my + m^2z = 1 \end{cases}$$

b) [1 punto] Teniendo en cuenta que  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ , determinar el valor del determinante  $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$ .

**SOLUCIÓN.**

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m^2 & 1 \end{array} \right)$$

Estudiamos los valores del parámetro para los que el rango de A es el máximo posible:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^4 + m^3 + m^2 - m^3 - m^3 - m^3 = m^4 - 2m^3 + m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m^2 - 2m + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

∴ Para  $m \neq 0$  y  $m \neq 1$ :  $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 = n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, utilizamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & m & m^2 \end{vmatrix}}{m^2(m-1)^2} = \frac{m^4 + m^2 + m - m^2 - m^2 - m^3}{m^2(m-1)^2} = \frac{m^4 - m^3 - m^2 + m}{m^2(m-1)^2} = \frac{m(m^3 - m^2 - m + 1)}{m^2(m-1)^2} = \frac{(m+1)(m-1)^2}{m(m-1)^2} = \frac{m+1}{m}$$

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} \Rightarrow m^3 - m^2 - m + 1 = (m-1)(m^2 - 1) = (m+1)(m-1)^2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m^2 \\ m & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{m^2(m-1)^2} = \frac{0}{m^2(m-1)^2} = 0 \quad (\text{en el determinante del numerador la segunda y tercera filas son iguales})$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m & m & 1 \end{vmatrix}}{m^2(m-1)^2} = \frac{m^2 + m^2 + m - m^3 - m - m}{m^2(m-1)^2} = \frac{-m^3 + 2m^2 - m}{m^2(m-1)^2} = \frac{m(-m^2 + 2m - 1)}{m^2(m-1)^2} = \frac{-(m-1)^2}{m(m-1)^2} = -\frac{1}{m}$$

C Para  $m=0$ :  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rg } A = 1 \\ \text{rg } B = 2 \end{array} \Rightarrow \text{rg } A \neq \text{rg } B \Rightarrow \text{el sistema es incompatible}$

C Para  $m=1$ :  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } B = 1 \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado}$

Resolución: utilizando las incógnitas “y” y “z” como parámetros:  $x = 1 - \lambda - \mu$  ;  $y = \lambda$  ;  $z = \mu$

b)  $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/a & 0 & 1 \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/a & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

La propiedad utilizada ha sido la de sacar factor común en alguna de las líneas del determinante.

### Opción B

a) [1,25 puntos] Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , calcular la inversa de la matriz  $A^n$ .

b) [1,25 puntos] Estudiar para qué valores del parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe un único polinomio  $P(x) = a + bx + cx^2$  que satisfice  $P(0) = \alpha$ ,  $P(1) = 0$ ,  $P(-1) = 0$ .

### SOLUCIÓN.

a) Calculemos  $A^n$ :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que:  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculemos la matriz inversa de  $A^n$ :  $|A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists (A^n)^{-1}$

$$(\text{Adj } A^n) = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (\text{Adj } A^n)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (A^n)^{-1} = \frac{(\text{Adj } A^n)^t}{|A^n|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $P(0) = \alpha \Rightarrow a = \alpha$   
 $P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$   
 $P(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

Para que haya un único polinomio, el sistema tiene que ser compatible determinado y no ser homogéneo (pues en este caso se tendrá  $a = b = c = 0$ )

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$ . Puesto que  $\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 1+1=2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3 \Rightarrow \text{rg } B = 3 \Rightarrow$  el sistema es compatible determinado  $\forall \alpha$ .

Y para que el sistema no sea homogéneo, debe ser  $\alpha \neq 0$ .

Es decir, existe un único polinomio  $P(x)$ ,  $\forall \alpha \neq 0$ .

## 2. GEOMETRÍA

### Opción A

Sean los vectores  $\vec{u} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{v} = (-2, 2, 1)$ ,  $\vec{w} = (3, -2, 5)$ ; calcular:

- [0,5 puntos]  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ .
- [0,5 puntos]  $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w})$ .
- [0,75 puntos] La ecuación del plano que pasa por el punto  $P(0, 0, 1)$  y es perpendicular al vector  $\vec{u}$ .
- [0,75 puntos] El ángulo que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

### SOLUCIÓN.

a)  $\vec{v} + \vec{w} = (1, 0, 6) \Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 1+0+18 = 19$

b)  $\vec{v} - \vec{w} = (-5, 4, -4) \Rightarrow \vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 15\vec{j} + 4\vec{k} - 5\vec{k} + 4\vec{j} - 12\vec{i} = (-8, -11, -1)$

c) Si el vector  $\vec{u}$  es normal al plano, la ecuación de éste es  $x - y + 3z + D = 0$  y como contiene al punto P:

$$0 - 0 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \text{la ecuación del plano es: } x - y + 3z - 3 = 0$$

d) De la definición del producto escalar de dos vectores, se obtiene:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} =$

$$= \frac{-2 - 2 + 3}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{4+4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{99}} = -\frac{1}{3\sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{11}}{33} \Rightarrow \alpha = 95^\circ 46' 5.45''$$

### Opción B

a) [1 punto] Estudiar la posición relativa de los planos  $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 0$  y  $\pi_2 \equiv x - 2y - z = 3$ .

b) [1,5 puntos] Considerar la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$ . Analizar si el punto  $P(6, 2, 2)$  se halla o no sobre la recta paralela a la anterior que pasa por el origen.

### SOLUCIÓN.

a) Puesto que los coeficientes no son proporcionales:  $\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow$  los planos son secantes (tienen por intersección una recta)

b) Obtengamos dos puntos de r:

$$\begin{cases} x - y = 1 + 3z \\ x - 3y = 5 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 + 3z \\ -x + 3y = -5 + z \end{cases} \Rightarrow 2y = -4 + 4z \Rightarrow y = -2 + 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 + 3z + y = 1 + 3z - 2 + 2z = -1 + 5z$$

Para  $z=0$ :  $y = -2$  ,  $x = -1 \Rightarrow Q(-1, -2, 0) \Rightarrow \overline{QR} = (5, 2, 1)$

Para  $z=1$ :  $y = 0$  ,  $x = 4 \Rightarrow R(4, 0, 1)$

Puesto que  $\overline{QR} = (5, 2, 1)$  y  $\overline{OP} = (6, 2, 2)$  no tienen la misma dirección (sus coordenadas no son proporcionales), el punto P no está en una recta paralela a r que pase por O.

### 3. ANÁLISIS

#### Opción A

1. a) [1,25 puntos] Calcular los siguientes límites:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{12x^2 \sqrt{x^2 - 7x}}{\sqrt{9x^6 + 5x}} \right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$ .

b) [1,25 puntos] Obtener  $\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} x \cos(x^2) dx$

#### SOLUCIÓN.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{12x^2 \sqrt{x^2 - 7x}}{\sqrt{9x^6 + 5x}} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{12x^2 \sqrt{x^2}}{\sqrt{9x^6}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{12x^3}{3x^3} \right) = 4$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x - 1) \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x - 1}{x}} = (1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x - 1}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{1} = 1 \quad \text{y, por tanto:} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x} = e$$

b)  $\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2)$

$$\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} x \cos(x^2) dx = \left[ \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} \right]_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2} = \frac{2 \cos \frac{3x}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2} = \cos \frac{3x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

2. Sea  $f(x) = 2x + \operatorname{sen}(2x)$

a) [0,75 puntos] Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) [1,25 puntos] Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de extremos relativos.

c) [0,5 puntos] ¿Son los puntos  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , puntos de inflexión de  $f(x)$ ?

#### SOLUCIÓN.

a)  $\mathbb{C}$  La función es continua por ser suma de dos funciones continuas  $\Rightarrow$  No tiene asíntotas verticales

c) Asíntotas horizontales u oblicuas:  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \operatorname{sen}(2x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}{1} = 2$

NOTA:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 0$  pues  $|\operatorname{sen}(2x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [2x + \operatorname{sen}(2x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\operatorname{sen}(2x)]$  que no existe.

Por lo tanto, la función no tiene asíntotas.

b)  $f'(x) = 2 + 2\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = -1 \Rightarrow 2x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  (puntos críticos)

$$\begin{array}{ccccccccc} f' > 0 & & f' > 0 \\ \hline & | & & | & & | & & | & \\ & \pi/2 & & 3\pi/2 & & 5\pi/2 & & & \end{array}$$

Entre cada dos puntos críticos, la derivada es siempre positiva por lo que la función es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

c)  $f''(x) = -4\operatorname{sen}(2x) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -4\operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) = 0$  (anulan a la segunda derivada)

$f'''(x) = -8\cos(2x) \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -8 \cdot \cos(\pi + 2k\pi) = 8 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  son puntos de inflexión

### Opción B

1. Sea  $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$

a) [0,5 puntos] Determinar su dominio.

b) [0,75 puntos] Estudiar si  $f(x)$  es una función simétrica respecto al origen de coordenadas.

c) [1,25 puntos] Obtener el área encerrada por  $f(x)$  y el eje OX entre  $x = \frac{1}{4}$  y  $x = \frac{3}{4}$ .

### SOLUCIÓN.

a)  $x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b)  $f(-x) = \frac{1}{-x-x^2} \neq -f(x) \Rightarrow$  no es simétrica respecto al origen de coordenadas

c) La función no se anula por lo que no corta al eje OX. Por tanto:  $S = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{x-x^2} dx = (1)$

$$\frac{1}{x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A-Ax+Bx}{x(1-x)} = \frac{(-A+B)x+A}{x-x^2} \Rightarrow \begin{cases} -A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x-x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{1-x} dx = \ln x - \ln(1-x) = \ln \frac{x}{1-x}$$

$$(1) = \left[ \ln \frac{x}{1-x} \right]_{1/4}^{3/4} = \ln \frac{3/4}{1-3/4} - \ln \frac{1/4}{1-1/4} = \ln 3 - \ln \frac{1}{3} = \ln 3 - \ln 1 + \ln 3 = 2 \ln 3 = \ln 9 \approx 2,197 \text{ u}^2$$

2. a) [1,25 puntos] Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros/m y la de los otros tres lados, 0,625 euros/m. Hallar el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros.

b) [1,25 puntos] Calcular para qué valores de  $a$  y  $b$  la función

$$\begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ a+x^2 & -1 < x < 1 \\ (b-x)^2 & x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua.}$$

**SOLUCIÓN.**

a) Se tiene:  $0,625x + 5(x + 2y) = 1800 \Rightarrow 5,625x + 10y = 1800 \Rightarrow y = \frac{1800 - 5,625x}{10} = 180 - 0,5625x$



La función que debe ser máxima es:  $f(x) = x \cdot y = 180x - 0,5625x^2$

$$f'(x) = 180 - 1,125x = 0 \Rightarrow x = 160 \text{ (valor crítico)}$$

y como  $f''(x) = -1,125 < 0 \Rightarrow f(x)$  es máxima.

Por tanto:  $x = 160 \text{ m}$  ,  $y = 90 \Rightarrow S = 14400 \text{ m}^2$

- b) Como las funciones que están definidas en cada uno de los trozos son polinómicas, son continuas. Habrá que exigir la continuidad en  $x = -1$  y en  $x = 1$ :

Para que la función sea continua en  $x = -1$ :  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = \lim_{x \rightarrow -1} (a+x^2) \Leftrightarrow 0 = a+1 \Rightarrow a = -1$

Para que la función sea continua en  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (-1+x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} (b-x)^2 \Leftrightarrow 0 = (b-1)^2 \Rightarrow b-1=0 \Rightarrow b=1$