

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. a) Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema lineal: (1,75 puntos)

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -2x + y + az = 1 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema anterior? (0,75 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A , y ampliada, M , son:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 0 \\ -2 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 1 & a & | & 1 \end{pmatrix}$$

Comparemos el rango de ambas matrices. El máximo rango posible de ambas matrices es 3:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2a - a^2 = 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$$

- Si $a \neq 0$: $\text{rg } A = \text{rg } M = 3 = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow Sistema compatible determinado
- Si $a = 0$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\text{rg } M = 3$ pues el menor de

la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Soluciones para el caso $a \neq 0$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{2a} = \frac{a - a}{2a} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{2a} = \frac{a^2 - a^2}{2a} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2a} = \frac{a + 2 - a}{2a} = \frac{1}{a}$$

b) No. Las soluciones obtenidas en el caso de compatibilidad exigen que $x = y = 0$.

A2. a) Utilizar el cambio de variable $t^3 = 1 - x$ para calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x}$ (1 punto)

b) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ y obtener $\int_{-1/2}^{1/2} f(x) dx$. (1,5 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $t^3 = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t^3$ y cuando $x \rightarrow 0 \Rightarrow t^3 \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 1$

Se tiene: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{1-t^3} = \frac{0}{0} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{-(t-1)(t^2+t+1)} = -\frac{1}{3}$

b) La función es continua en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$. Estudiemos la continuidad en $x = 1$:

- $\exists f(1) = 0$

- $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

luego la función es discontinua en $x = 1$ (con una discontinuidad no evitable).

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1/2}^{1/2} = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$$

A3. Sea la función $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$ con $x \in (0, 1)$.

a) Calcular sus extremos relativos. (1,5 puntos)

b) Estudiar su crecimiento y decrecimiento y razonar si posee algún punto de inflexión. (1 punto)

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln \frac{x}{1-x} = 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = 1 \Rightarrow x = 1-x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (punto crítico)

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 = 4 > 0 \Rightarrow$ En $x = \frac{1}{2}$ la función tiene un mínimo relativo

b) La función es continua en el intervalo $(0, 1)$ por ser producto y suma de funciones continuas. Como tiene en $x = \frac{1}{2}$

un mínimo relativo: la función es decreciente en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Veamos si tiene algún punto de inflexión:

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} \neq 0 \forall x \Rightarrow$ la función no tiene puntos de inflexión.

A4. a) Calcular el plano determinado por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. (1 punto)

b) Determinar el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2$ y $\pi_2 \equiv z = 0$. (0,75 puntos)

c) Obtener el producto vectorial de $\vec{a} = (2, 0, 1)$ y $\vec{b} = (1, -1, 3)$. (0,75 puntos)

SOLUCIÓN.

a) El plano está determinado por el punto $P(1, 0, 0)$ y los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{PR} = (-1, 0, 1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-1+z+y=0 \Leftrightarrow x+y+z-1=0$$

b) El ángulo que forman los planos es el que forman los vectores normales a cada uno de ellos:

$$\vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1) \text{ y } \vec{n}_2 = (0, 0, 1).$$

Se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2+1+1} \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\text{c) } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{j} - 2\vec{k} - 6\vec{j} + \vec{i} = (1, -5, -2)$$

OPCIÓN B

B1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

a) Estudiar si existen valores de α y β para los cuales la matriz A sea simétrica. ¿Será la matriz $B = A A^T$ igual a la matriz identidad en algún caso? (1 punto)

b) Razonar cuál es la relación entre el determinante de A y el de B. (0,75 puntos)

c) Discutir y resolver cuando sea posible el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (0,75 puntos)

SOLUCIÓN.

a) Para que A sea simétrica debe ser: $\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 + k\pi$

Para que $B = A A^T = I_3$:

$$B = A A^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1$$

$$\text{b) } |A| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta \cos^2 \alpha + \beta \operatorname{sen}^2 \alpha = \beta (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \beta \quad ; \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^2$$

Por tanto: $|B| = |A|^2$

c) Las matrices de los coeficientes B y ampliada M, son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

El único menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Por tanto:

- Para $\beta \neq 0$: $\text{rg } B = \text{rg } M = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

- Para $\beta = 0$: $\text{rg } B = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\text{rg } M = 3$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

Las soluciones para $\beta \neq 0$ las hallamos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

B2. El número de socios de una ONG viene dado por la función $n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$ donde x indica el número de años desde su fundación.

- Calcular el número de socios iniciales en el momento fundacional y en el quinto año. (0,5 puntos)
- ¿En qué año ha habido el menor número de socios? ¿Cuántos fueron?. (1 punto)
- El cuarto año se produjo un cambio en la junta directiva, ¿influyó en el ascenso o descenso del número de socios?. (1 punto)

SOLUCIÓN.

- Para $x = 0$: $n(0) = 26$ socios
- Para $x = 5$: $n(5) = 21$ socios

b) Se debe obtener el mínimo de la función:

$$n'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 15x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{6} = \frac{15 \pm 9}{6} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$n''(x) = 12x - 30 \Rightarrow \begin{cases} n''(1) < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un máximo relativo} \\ n''(4) > 0 \Rightarrow x = 4 \text{ es un mínimo relativo} \end{cases}$$

Por lo tanto, el menor número de socios se ha producido al cuarto año. Su número es: $n(4) = 10$ socios.

c) Como la función es continua y alcanza su mínimo relativo en $x = 4$, a partir del cuarto año el número de socios crecerá.

B3. Sea $f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{1+x}}$ una función definida en $[-1, +\infty)$.

a) ¿Cuánto debe valer $f(0)$ para asegurar que $f(x)$ es continua en su dominio? Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{1 + \sqrt{1+x}} dx$. (1,5 puntos)

b) Para $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{1 + \sqrt{1+t}} dt$ calcular $G'(x)$. (1 punto)

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en $x = 0$, debe ser $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Por lo tanto:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1+x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1+x})}{(1 - \sqrt{1+x})(1 + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1+x})}{1 - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1+x})}{-x} = -2$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{1 + \sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 \frac{\frac{x}{1 - \sqrt{1+x}}}{1 + \sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 \frac{x}{(1 + \sqrt{1+x})(1 - \sqrt{1+x})} dx = \int_1^2 \frac{x}{1 - 1 - x} dx =$$

$$= \int_1^2 (-dx) = [-x]_1^2 = -2 + 1 = -1$$

b) $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{1 + \sqrt{1+t}} dt = [-t]_1^x = -x + 1 \Rightarrow G'(x) = -1$

B4. Estudiar la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x+1}{3} = y-2 = \frac{z}{2}$ y el plano determinado por los puntos

$A(1,3,2)$, $B(2,0,1)$ y $C(1,4,3)$. ¿Son perpendiculares?. Hallar la distancia del punto $P\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$ a la recta r .
(2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

- Un vector direccional de r es $\vec{u} = (3,1,2)$ y dos vectores del plano son $\vec{AB} = (1,-3,-1)$ y $\vec{AC} = (0,1,1)$. Veamos si son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 2 - 1 + 3 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores son linealmente independientes} \Rightarrow \text{la recta y el plano se cortan en un punto.}$$

- La recta y el plano serán perpendiculares si lo son el vector direccional de la recta y alguno de los vectores del plano. Para averiguarlo, calculemos el producto escalar:

$\vec{u} \cdot \vec{AB} = (3,1,2) \cdot (1,-3,-1) = 3 - 3 - 2 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores no son perpendiculares} \Rightarrow \text{la recta y el plano no son perpendiculares.}$

- Un punto de la recta es $Q(-1,2,0) \Rightarrow \vec{QP} = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$. La distancia entre P y r viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{QP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{\left| \frac{6}{5}\vec{i} + \frac{18}{5}\vec{j} + \frac{9}{5}\vec{k} - \frac{9}{5}\vec{k} - \frac{18}{5}\vec{j} - \frac{6}{5}\vec{i} \right|}{\sqrt{14}} = \frac{|\vec{0}|}{\sqrt{14}} = 0$$

es decir, el punto P pertenece a la recta r .