

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

**OPCIÓN A**

**A. 1.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\lambda x + 4y + 12z &= 0 \\ 2x + y + 4z &= \lambda \\ \lambda x + y + 6z &= 0\end{aligned}$$

**a)** (1 punto) Determine los valores de  $\lambda$  para los que el sistema de ecuaciones tiene solución única.

**b)** (1,5 puntos) Resuelva el sistema, si es posible, cuando  $\lambda = 4$  y cuando  $\lambda = 0$ .

**SOLUCIÓN.**

**a)** Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & \lambda \\ \lambda & 1 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema tiene solución única cuando  $\text{rg} A = \text{rg} B = 3$ . Estudiemos el rango de A para los distintos valores del parámetro:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 4 \\ \lambda & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6\lambda + 16\lambda + 24 - 12\lambda - 4\lambda - 48 = 6\lambda - 24 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow \text{el sistema tiene solución única } \forall \lambda \neq 4.$$

**b)** · Para  $\lambda = 4$ :  $\text{rg} A = 2$  pues el menor  $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ . Orlamos este menor con los términos independientes para ver cuál es el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 48 - 96 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} B = 3 \Rightarrow \text{rg} A \neq \text{rg} B \Rightarrow \text{el sistema es incompatible, no tiene solución}$$

· Para  $\lambda = 0$ , el sistema es compatible determinado. Puesto que se trata ahora de un sistema homogéneo, la única solución es la trivial:  $x = y = z = 0$

**A. 2. a)** (1,25 puntos) Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: 2x + 3y - z = 1$$

$$\pi': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

**b)** (1,25 puntos) Encuentre la recta que pasa por el punto  $P = (0, 1, 1)$  y es perpendicular al plano  $\pi'$ . Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

**SOLUCIÓN.**

**a)** Escribamos el plano  $\pi'$  en forma general:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-1 \\ 2 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = -z-1+2y-2+2x-y+1 = 2x+y-z-2=0$$

En el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos  $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$  se tiene:  $\text{rg } A = \text{rg } B = 2 \Rightarrow$  los planos se cortan en una recta.

b) La recta queda determinada por el punto  $P(0, 1, 1)$  y un vector normal al plano  $\pi'$ :  $\vec{n} = (2, 1, -1)$ .

Su ecuación continua es:  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-2 \\ -x=2z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

**A. 3.** Sea la función:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}$$

a) (0,5 puntos) Determine su dominio de definición.

b) (1 punto) Encuentre las asíntotas que tenga esa función.

c) (1 punto) Considere ahora la función:

$$g(x) = \frac{(x+2)^2}{x+3}$$

Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

**SOLUCIÓN.**

a)  $f(x)$  es una función racional:  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Su dominio es  $D(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0\}$ .

Tenemos:  $x^2+4x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$

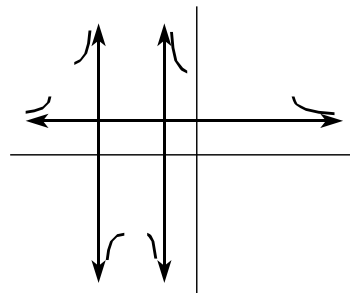
b) · Asíntotas verticales:  $x=-3$  y  $x=-1$  pues  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3} = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3} = \infty$

Además:  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3} = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3} = +\infty$

· Asíntota horizontal:  $y=1$  pues  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3} = 1$

Además:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3} = 1^+$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3} = 1^+$



c)  $g'(x) = \frac{2(x+2)(x+3) - (x+2)^2}{(x+3)^2} = \frac{(x+2)[2x+6-x-2]}{(x+3)^2} = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow x = -2, x = -4$

Se tiene:

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| $g' > 0$ | $g' < 0$ | $g' > 0$ |
|          | ○        |          |
| -4       | -3       | -2       |

Es decir: la función es creciente en  $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$  y decreciente en  $(-4, -3) \cup (-3, -2)$

· Los posibles puntos de máximo o de mínimo relativos son los de abscisas  $x=-4$  y  $x=-2$ . En  $x=-4$  la función tiene un máximo relativo puesto que es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha y en  $x=-2$  un mínimo relativo porque es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

**A. 4. a)** (1,25 puntos) Calcule:

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2 - 4x + 2} dx$$

**b)** (1,25 puntos) Determine el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \ln(x) + [\ln(x)]^2}{x[1 + \ln(x)]}$$

**SOLUCIÓN.**

**a)**  $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$ .

Obtenemos una primitiva de la función:  $\int \frac{1}{2x^2 - 4x + 2} dx = \int \frac{1}{2(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \int (x-1)^{-2} dx = \frac{1}{2} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(x-1)}$

Se tiene entonces:  $\int_2^3 \frac{1}{2x^2 - 4x + 2} dx = \left[ -\frac{1}{2(x-1)} \right]_2^3 = \left( -\frac{1}{4} \right) - \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \ln(x) + [\ln(x)]^2}{x[1 + \ln(x)]} = \frac{\infty}{\infty}$ . Apliquemos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \ln(x) + [\ln(x)]^2}{x[1 + \ln(x)]} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + 2 \ln(x) \frac{1}{x}}{\left[1 + \ln(x)\right] + x \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2[1 + \ln(x)]}{x}}{\frac{2 + \ln(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2[1 + \ln(x)]}{x[2 + \ln(x)]} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \frac{1}{x}}{\left[2 + \ln(x)\right] + x \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{3 + \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x[3 + \ln(x)]} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

### **OPCIÓN B**

**B. 1.** Sean  $A$  y  $B$  las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$$

**a)** (1 punto) ¿Para qué valores de  $a$  existe la inversa de  $AB$ ? ¿Y la de  $BA$ ?

**b)** (1,5 puntos) Encuentre la inversa de la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Compruebe que cuando la matriz encontrada se multiplica por la izquierda por  $C$ , se obtiene la identidad.

**SOLUCIÓN.**

**a)**  $AB = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & a-1 \\ 3 & a-1 \end{pmatrix} \quad ; \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3a & a+3 & a \end{pmatrix}$

$$\cdot \begin{vmatrix} -2a & a-1 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a - 3a + 3 = -2a^2 - a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto,  $\exists (AB)^{-1} \forall a \neq -\frac{3}{2}$  y  $1$

$$\cdot \begin{vmatrix} -2a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3a & a+3 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 3a + 3a - 2a^2 - 6a = 0 \quad \forall a \Rightarrow \text{No existe la matriz inversa de } BA \text{ para ningún valor de } a.$$

$$\text{b) } |C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 18 + 18 - 24 - 24 - 18 = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} (\text{Adj } C) = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} (\text{Adj } C)^t = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} C^{-1} = \frac{(\text{Adj } C)^t}{|C|} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego, en efecto, se cumple.}$$

**B. 2.** Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}, \quad \text{con } k \neq 0$$

$$s : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

**a) (2 puntos)** Estudie las posiciones relativas de las rectas según los diferentes valores de  $k$ .

**b) (0,5 puntos)** ¿Existen valores de  $k$  para los que las rectas son perpendiculares?

**SOLUCIÓN.**

**a)**  $\vec{u} = (k, 2, -1)$  es un vector direccional de  $r$  y  $P(1, 2, 0)$  un punto de la misma.

Busquemos un vector direccional de  $s$ :

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - y \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 2x + 1 = -x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{dos puntos de } s: \begin{vmatrix} A(0, -1, 1) \\ B(1, 1, 0) \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -1)$$

· Si  $k=1$ :  $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow r$  y  $s$  son coincidentes o paralelas. Como  $P \notin s$  pues sus coordenadas no verifican las ecuaciones de  $s$ , las dos rectas son paralelas.

· Si  $k \neq 1$ : las rectas se cruzan o se cortan. Consideremos un vector de origen en  $r$  y extremo en  $s$ :  $\overrightarrow{PB} = (0, -1, 0)$  y veamos si los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\overrightarrow{PB}$  son linealmente dependientes (las rectas se cortan) o independientes (las rectas se cruzan):

$$\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - k \neq 0 \quad \forall k \neq 1 \Rightarrow \text{los vectores son independientes y por tanto las rectas se cruzan.}$$

**b)** Las rectas son perpendiculares si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k + 4 + 1 = 0 \Rightarrow k = -5$

**B. 3. a)** Considere las funciones:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 3 - x.$$

(0,5 puntos) Determine los puntos de corte de esas dos funciones.

(1 punto) Determine el área encerrada entre esas dos funciones.

**b)** (1 punto) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$h(x) = x^6 + 2.$$

### SOLUCIÓN.

**a)** · Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas funciones:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow 3 - x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = -2 \Rightarrow (-2, 5) \\ x = 1 \Rightarrow (1, 2) \end{cases}$$

· Consideremos la función diferencia:  $d(x) = g(x) - f(x) = 3 - x - x^2 - 1 = -x^2 - x + 2$

$$\text{Tenemos: } A = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left( -\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = -3 - \frac{1}{2} + 8 = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$

**b)** · Máximos y mínimos relativos:  $h'(x) = 6x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$  (posible punto de máximo o de mínimo)

$$h''(x) = 30x^4: h''(0) = 0 \quad ; \quad h'''(x) = 120x^3: h'''(0) = 0 \quad ; \quad h^{IV}(x) = 360x^2: h^{IV}(0) = 0$$

$$h^V(x) = 720x: h^V(0) = 0 \quad ; \quad h^{VI}(x) = 720 > 0$$

Como la primera derivada que no se anula es de orden par y es positiva, en  $x = 0$   $h(x)$  tiene un mínimo relativo.

· La función no tiene puntos de inflexión pues en  $x = 0$  que anula la segunda derivada, ya sabemos que hay un mínimo relativo.

**B. 4. a)** (1,25 puntos) Usando el cambio de variable  $t = e^x$ , calcule:

$$\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}} dx$$

**b)** (1,25 puntos) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{\sqrt{x}}$$

### SOLUCIÓN.

**a)**  $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}} dx = \int \frac{dt}{1 - \frac{1}{t}} = \int \frac{t}{t-1} dt = \int \left( 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = t + \ln|t-1| + K = e^x + \ln|e^x - 1| + K$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{\sqrt{x}} &= 1^\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x-1}{x+1} - 1 \right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x-1-x-1}{x+1} \right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-2}{x+1} \right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}} \right)^{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}} \right)^{\frac{x+1}{-2}} \right]^{\frac{-2\sqrt{x}}{x+1}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$