

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A.1. Sea A la matriz: $A = \begin{pmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Discuta el sistema que aparece a continuación, para cada uno de los valores de m y resuélvalo para los valores de m siguientes: $m = -1$ y $m = 2$.

$$A X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine la inversa de la matriz A cuando $m = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un sistema homogéneo. Su discusión (compatible determinado o compatible indeterminado) depende del rango de la matriz de los coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -5m + 3 + 3 + m^2 = m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

Se tiene: • Si $m \neq 2$ y $m \neq 3$: $\text{rg } A = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (una única solución: $x = y = z = 0$)

• Si $m = 2$ o $m = 3$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

• Para $m = -1$: el sistema tiene como única solución la trivial $x = y = z = 0$

• Para $m = 2$: el sistema es compatible indeterminado. El sistema dado es equivalente a:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2x = -2\lambda \Rightarrow x = -\lambda ; y = x = -\lambda \text{ luego las soluciones son:}$$

$$x = y = -\lambda, z = \lambda$$

b) Para $m = 0$: $|A| = 6$.

Tenemos: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -5/6 & -5/6 \end{pmatrix}$

A.2. a) (1 punto) ¿Pueden existir vectores \vec{u} y \vec{v} tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$? Justifique la respuesta.

b) (1,5 puntos) Determine todos los posibles vectores $\vec{u} = (a, 0, b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a

la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN.

a) No, pues: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 8 \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{8}{6}$ que es imposible.

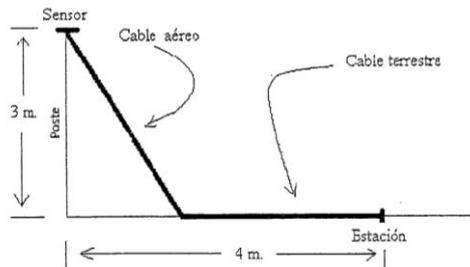
b) Obtengamos un vector direccional de r. Dos puntos de la recta son: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ x - y = -z + 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x = -2z + 2 \Rightarrow x = -z + 1, y = -1 \Rightarrow A(0, -1, 1), B(1, -1, 0) \text{ y un vector direccional: } \overline{AB} = (1, 0, -1).$$

Se tiene: $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 8 \Rightarrow a^2 + b^2 = 64 \quad | \Rightarrow a = b \Rightarrow 2a^2 = 64 \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = b = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$
 $\vec{u} \cdot \overline{AB} = 0 \Rightarrow a - b = 0$

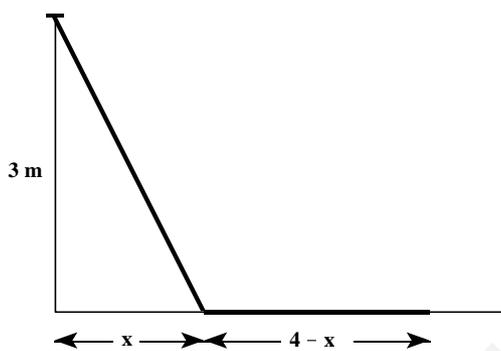
Es decir: $\vec{u} = (4\sqrt{2}, 0, 4\sqrt{2})$ y $\vec{u} = (-4\sqrt{2}, 0, -4\sqrt{2})$

A.3. (2,5 puntos) Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (véase figura). El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



SOLUCIÓN.

Sea x la distancia del poste al punto en que el cable aéreo llega a tierra (ver dibujo). La longitud del cable aéreo es:



$$L = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$$

El coste del cable es: $C = 3000\sqrt{9 + x^2} + 1000(4 - x)$ que debe ser mínimo:

$$C' = 3000 \frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} - 1000 = \frac{3000x}{\sqrt{9 + x^2}} - 1000 = 0 \Rightarrow$$

$$3000x = 1000\sqrt{9 + x^2} = 0 \Rightarrow 9x^2 = 9 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,06$$

Veamos que este valor crítico hace mínimo el coste:

$$C'' = \frac{3000\sqrt{9 + x^2} - 3000x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}}}{9 + x^2} = \frac{3000(9 + x^2) - 3000x^2}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}} =$$

$$= \frac{27000}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}} > 0 \Rightarrow \text{la función coste es mínima.}$$

Por lo tanto, la longitud del cable aéreo debe ser: $L = \sqrt{9 + \frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \approx 3,18 \text{ m.}$ El cable aéreo debe llegar a tierra a 1,06 metros del poste. El cable terrestre debe medir $2,94 \text{ metros.}$

A.4. a) (1,25 puntos) Determine la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) (1,25 puntos) Calcule: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3-x} \right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

SOLUCIÓN.

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$:

$$f(x) = \int 2xe^{5x} dx = \begin{cases} u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^{5x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{5} e^{5x} \end{cases} = \frac{2}{5} x e^{5x} - \frac{2}{5} \int e^{5x} dx = \frac{2}{5} x e^{5x} - \frac{2}{25} e^{5x} + C = \frac{2}{5} e^{5x} \left(x - \frac{1}{5} \right) + C$$

Calculemos ahora la constante de integración con la condición $f(0) = 2$:

$$f(0) = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + C = 2 \Rightarrow C = 2 + \frac{2}{25} = \frac{52}{25} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{2}{5} e^{5x} \left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{52}{25}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3-x} - 1\right) \frac{1}{(2-x)^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(1-3+x)}{(3-x)(2-x)^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)}{(3-x)(x-2)^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(3-x)(x-2)}} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

También podríamos haber realizado el cambio de variable: $x - 2 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x-2}$ y cuando $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3-2-\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{1}{t^2}\right)}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{t}{t-1} - 1\right)^{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{(t-1)}\right]^{\frac{t^2}{t-1}} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

OPCIÓN B

B.1. a) (1 punto) Determine el rango de la matriz A, que aparece a continuación, según los diferentes valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Determine, si existe, una matriz A, 2×2 , que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A?

SOLUCIÓN.

a) Estudiemos los valores de a para los que el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} = 20a - 60 - 4a(a+2) + 12(a+2) + 20a - 20a = -4a^2 + 24a - 36 = 4(-a^2 + 6a - 9) = 0 \Rightarrow -a^2 + 6a - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = 3$$

Tenemos entonces:

- Para $a \neq 3$: $\text{rg } A = 3$

- Para $a = 3$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 20 + 20 \neq 0$

b) Sea $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.

Se tiene: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_{11} + x_{21} & 2x_{12} + x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_{11} + x_{21} & -2x_{11} - x_{21} + 2x_{12} + x_{22} \\ x_{11} + x_{21} & -x_{11} - x_{21} + x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{11} + x_{21} = -3 \\ x_{11} + x_{21} = 3 \\ -2x_{11} - x_{21} + 2x_{12} + x_{22} = -3 \\ -x_{11} - x_{21} + x_{12} + x_{22} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{11} + x_{21} = -3 \\ x_{11} + x_{21} = 3 \\ 2x_{12} + x_{22} = -6 \\ x_{12} + x_{22} = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{11} = -6 \\ x_{21} = 9 \\ x_{12} = -12 \\ x_{22} = 18 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{rg} A = 1 \text{ porque } F_2 = -1,5 \cdot F_1 \text{ (las dos filas son proporcionales)}$$

• Otra forma: calculemos las matrices inversas de los dos factores:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta de la traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Dividir por determinante}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta de la traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Dividir por determinante}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y ahora: } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

B.2. Dadas las rectas: $r: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ y $s: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

a) (1,5 puntos) Determine su posición relativa

b) (1 punto) Calcule la distancia del punto $P = (2, 3, 1)$ a la recta s.

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u} = (2, 3, 1)$ es un vector direccional de r. $\vec{v} = (-1, 2, 2)$ lo es de s. Como las coordenadas no son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan

$A(0,0,0)$ es un punto de r. $B(0,1,-2)$ es un punto de s. $\overline{AB} = (0,1,-2)$ es un vector con origen en r y extremo en s.

$$\text{Puesto que } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 1 - 6 - 4 = -19 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{r y s se cruzan}}$$

b) • Calculemos la ecuación del plano π perpendicular a s que pasa por P:

El vector $\vec{v} = (-1, 2, 2)$ direccional de s, es normal al plano π : $\pi: -x + 2y + 2z + D = 0$.

Como $P \in \pi$: $-2 + 6 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow \pi: -x + 2y + 2z - 6 = 0$

• Calculemos el punto de corte de π y s:

$$\lambda + 2(1 + 2\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda + 2 + 4\lambda - 4 + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{9} \Rightarrow Q\left(-\frac{8}{9}, \frac{25}{9}, -\frac{2}{9}\right)$$

• La distancia entre P y s es la distancia entre P y Q:

$$d(P, s) = d(P, Q) = \sqrt{\left(2 + \frac{8}{9}\right)^2 + \left(3 - \frac{25}{9}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{676}{81} + \frac{4}{81} + \frac{121}{81}} = \sqrt{\frac{801}{81}} = \frac{3\sqrt{89}}{9} = \frac{\sqrt{89}}{3} \text{ u}$$

• Otra forma: $d(P, s) = \frac{|\overline{PQ} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ donde $Q \in s$ y \vec{v} es un vector direccional de s.

$$\begin{matrix} P(2, 3, 1) \\ Q(0, 1, -2) \end{matrix} \Rightarrow \overline{PQ} = (-2, -2, -3)$$

$$\overline{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} + 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} = (2, 7, -6) \Rightarrow |\overline{PQ} \times \vec{v}| = \sqrt{4 + 49 + 36} = \sqrt{89}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Y por tanto: $d(P, s) = \frac{\sqrt{89}}{3} u$

B.3. a) (1,25 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Determine el dominio y las asíntotas de $f(x)$, si existen.

b) (1,25 puntos) Determine el área del recinto encerrado por las funciones $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = 1$.

SOLUCIÓN.

a) • Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty$

• Asíntota oblicua: $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow y = x$ es una asíntota oblicua de la función

x^3	$x^2 - 1$
$-x^3 + x$	x
$\hline x$	

b) Consideremos la función diferencia $d(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 2$ y calculemos el área del recinto limitado por esta función y el eje OX.

Los puntos de corte de la función $d(x)$ y el eje de abscisas son: $-x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Tenemos:
$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} (-x^2 + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} \right) =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} u^2$$

B.4. a) (1 punto) Determine qué valor debe tomar k para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5}) = 1$

b) (1,5 puntos) Calcule: $\int 2x[\ln(x)]^2 dx$

SOLUCIÓN.

a)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5})(2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5})}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - kx + 5}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-kx}{2x + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-kx}{4x} = -\frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = -4$$

b)
$$\int 2x[\ln(x)]^2 dx = \left| \begin{array}{l} u = [\ln(x)]^2 \Rightarrow du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx \\ dv = 2x dx \Rightarrow v = x^2 \end{array} \right| = x^2 [\ln(x)]^2 - \int 2x^2 \frac{1}{x} \ln x dx = x^2 [\ln(x)]^2 - \int 2x \ln x dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = 2x dx \Rightarrow v = x^2 \end{array} \right| = x^2 [\ln(x)]^2 - \left[x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} dx \right] = x^2 [\ln(x)]^2 - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} + C = x^2 \left[\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right] + C$$