



Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3 puntos)

- a) (2 puntos)** Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + \lambda z &= 4 \\ \lambda x + \lambda y + z &= 6 \\ -\lambda x + \lambda y + \lambda z &= 3 + \lambda \end{aligned}$$

- b) (1 punto)** Resuélvalo, si es posible, para $\lambda = 2$.

SOLUCIÓN

- a)** La matriz A de los coeficientes y la matriz B ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ -\lambda & \lambda & \lambda & 3+\lambda \end{array} \right)$$

El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^3 - \lambda^3 + \lambda = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

- Para $\lambda \neq 0$ y 1 : $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

- Para $\lambda = 0$: las matrices A y B son $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$.

$\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Orlemos este menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } B = 3$

Y como $\text{rg } A \neq \text{rg } B \Rightarrow$ el sistema es incompatible para $\lambda = 0$.

- Para $\lambda = 1$: las matrices A y B son $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$.

$\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 - 6 + 4 - 4 + 6 = 0 \Rightarrow \text{rg } B = 2$

El sistema es compatible indeterminado para $\lambda = 1$ pues $\text{rg } A = \text{rg } B = 2 < n^\circ$ de incógnitas.

b) Para $\lambda = 2$ el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} -x + 2y + 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ -2x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16 + 24 + 10 - 20 - 8 - 24}{-4 + 8 - 4 + 8 - 8 + 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-12 + 20 - 8 + 24 - 16 + 5}{2} = \frac{13}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-10 + 16 - 24 + 16 - 20 + 12}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

2. (2 puntos)

a) (1 punto)

a.1) (0,5 puntos) Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s})$.

a.2) (0,5 puntos) Si el producto escalar del vector $\vec{u} + \vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

b) (1 punto) Determine el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2} \quad s: \begin{cases} x-y-z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

a.1) Por la propiedad distributiva del producto escalar:

$$\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s}) = \vec{w} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{s} = |\vec{w}|^2 - |\vec{w}| |\vec{s}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 2 = 2$$

a.2) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 25$ donde hemos utilizado que el producto escalar es conmutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 9 \quad (2)$$

Restando ordenadamente las igualdades (1) y (2) tenemos: $4\vec{u} \cdot \vec{v} = 16 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 4$

b) Se tiene: $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores direccionales de r y s.

La recta r viene expresada por su ecuación continua. Su vector direccional es: $\vec{u} = (3, 2, 2)$

La recta s está expresada como intersección de dos planos. Su vector direccional es $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}'$ siendo $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ vectores normales a cada uno de los planos. En nuestro caso:

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} + \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{i} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k} = (-3, -3, 0) \parallel (1, 1, 0)$$

$$\text{Así pues: } \cos \alpha = \frac{|3+2+0|}{\sqrt{3^2+2^2+2^2} \sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{5}{\sqrt{17} \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \approx 0,8575 \Rightarrow \alpha = 30^\circ 57' 49,52''$$

3. (5 puntos)

a) (2,25 puntos) Considere la función:

$$f(x) = \frac{1}{8x - x^2}$$

a.1) (1,5 puntos) Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) (0,75 puntos) Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Determine:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\ln(x^2)) \left(\frac{x+1}{x^2+3} \right) \right)$$

c) (1,5 puntos) Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^3$, y $g(x) = 2x^2 - x$.

SOLUCIÓN

a.1) Puesto que se trata de una función racional:

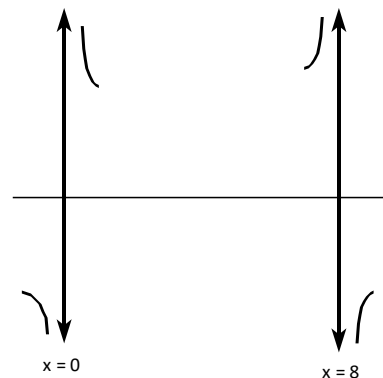
▪ Asíntotas verticales: $8x - x^2 = 0 \Rightarrow x(8-x) = 0 \Rightarrow x=0, x=8$

$x=0$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(8-x)} = \infty$.

Además: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(8-x)} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(8-x)} = +\infty$

$x=8$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x(8-x)} = \infty$.

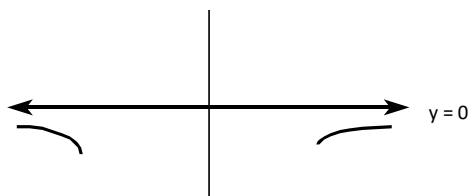
Además: $\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{1}{x(8-x)} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1}{x(8-x)} = -\infty$



▪ Asíntota horizontal: $y=0$ es una asíntota horizontal de la función pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(8-x)} = 0$.

Además, la posición relativa de la gráfica respecto a la asíntota es:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(8-x)} = 0^-$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(8-x)} = 0^-$



a.2) $f'(x) = \frac{-8+2x}{(8x-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x=4$ (valor crítico)

$f''(x) = \frac{2(8x-x^2)^2 - (-8+2x)2(8x-x^2)(8-2x)}{(8x-x^2)^4} \Rightarrow f''(4) > 0 \Rightarrow x=4$ es un mínimo relativo.

La función tiene un mínimo relativo en $\left(4, \frac{1}{16}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x^2) \right) \left(\frac{x+1}{x^2+3} \right) &= \infty \cdot 0 \text{ (indeterminación)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x (x+1)}{x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} (x+1) + 2 \ln x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1) + 2x \ln x}{2x^2} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 2 \ln x}{4x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4x} = 0 \end{aligned}$$

(1), (2) y (3): regla de L'Hôpital

c) Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + x$ y calculamos el área limitada por $h(x)$ y el eje OX.

Puntos de corte de $h(x)$ con OX: $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=0, x=1$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12} u^2$$

OPCIÓN B

1. (3 puntos)

a) (2 puntos) Sea " a " un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro " a ":

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1 , C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.

Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2$ y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B , si existe.

SOLUCIÓN

a) Como el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de la matriz es como mínimo 2.

Veamos los valores del parámetro para los que el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = -a(a+1) + (a+1) = (a+1)(-a+1) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 1$$

Por lo tanto, si $a \neq -1$ y $a \neq 1$: $\text{rg} A = 3$

Para cualquier otro valor de a , el rango de A es 2.

b) Sea $C = (C_1 \ C_2 \ C_3)$ la matriz dada cuyo determinante es $|C| = 2$.

$$\begin{aligned} |B| &= |-C_2 \ C_3 + C_2 \ 3C_1| \stackrel{(1)}{=} |-C_2 \ C_3 \ 3C_1| + |-C_2 \ C_2 \ 3C_1| \stackrel{(2)}{=} |-C_2 \ C_3 \ 3C_1| = -3|C_2 \ C_3 \ C_1| \stackrel{(4)}{=} 3|C_1 \ C_3 \ C_2| \stackrel{(5)}{=} \\ &\stackrel{(5)}{=} -3|C_1 \ C_2 \ C_3| = -6 \quad (*) \end{aligned}$$

Se tiene: $|B \cdot B^{-1}| = |I_3| = 1 = |B| \cdot |B^{-1}| = -6 \cdot |B^{-1}| \Rightarrow |B^{-1}| = -\frac{1}{6}$

- (*) Propiedades utilizadas:
- (1): El determinante se descompone en suma de otros dos porque la segunda columna es una suma.
 - (2): El segundo determinante es 0 porque tiene dos columnas iguales.
 - (3): De la primera columna sacamos el factor común -1 y de la tercera columna el factor 3.
 - (4) y (5): Al permutar dos columnas el determinante cambia de signo.

2. (2 puntos) Considere el plano π y la recta r que aparecen a continuación:

$$\pi : mx - 3y + 2z = 1, \quad r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine para qué valores del parámetro " m " la recta r y el plano π son secantes, es decir, se cortan.
- b) (1 punto) Determine el ángulo que forman el plano π y la recta r cuando $m = 1$.

SOLUCIÓN

a) Lo serán cuando el sistema formado por los tres planos (el plano π y los dos planos que definen la recta r) sea compatible determinado.

El menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 6 - 4 + 18 = 2m + 8 = 0 \Rightarrow m = -4$$

Por lo tanto, cuando $m \neq -4$ el rango de las matrices de los coeficientes y ampliada coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y el plano y la recta son secantes.

b) Para $m = 1$ el plano y la recta son secantes. La ecuación del plano es $\pi : x - 3y + 2z = 1$ y $\vec{n} = (1, -3, 2)$ es un vector normal al mismo.

Obtengamos un vector direccional de la recta. Para ello obtengamos dos puntos de la misma:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 & \text{Para } x = 0: y = 1, z = 1 \Rightarrow A(0, 1, 1) \\ 2x - y + 2z = 1 & \text{Para } x = 2: y = -5, z = -4 \Rightarrow B(2, -5, -4) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -6, -5)$$

El ángulo α que forman π y r es el complementario del que forman $\vec{n}$ y $\vec{u}$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| |\vec{u}|} = \frac{|2 + 18 - 10|}{\sqrt{1 + 9 + 4} \sqrt{4 + 36 + 25}} = \frac{10}{\sqrt{14} \sqrt{65}} = \frac{10}{\sqrt{910}} \approx 0,3315 \Rightarrow 90^\circ - \alpha = 70^\circ 38' 25,26'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 19^\circ 21' 34,74''$$

3. (5 puntos)

a) (1,5 puntos) Determine el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 1}{2x - 1} - \frac{3}{2} \right)^{\frac{2x^2 + 1}{x - 1}}$$

b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t = \cos(x)$, calcule:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 - \cos(x)} dx$$

c) (2 puntos) Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).



Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.

SOLUCIÓN

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right)^{\infty} = 1^{\infty} \text{ (indeterminación)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10x+2-6x+3}{4x-2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+5}{4x-2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4x+5}{4x-2} - 1 \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{4x-2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1} \cdot \frac{4x-2}{4x-2} \cdot \frac{7}{7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}} \right)^{\frac{4x-2}{7}} \right]^{\frac{2x^2+1}{x-1} \cdot \frac{7}{4x-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{4x-2}{7}} \right)^{\frac{4x-2}{7}} \right]^{\frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2}} = e^{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

También:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+5}{4x-2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+5}{4x-2} - 1 \right) \cdot \frac{2x^2+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+5-4x+2}{4x-2} \right) \cdot \frac{2x^2+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{4x-2} \right) \cdot \frac{2x^2+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2} \right)} = e^{\frac{7}{2}}$$

$$\text{b) } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$\text{Obtengamos una primitiva: } \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} \, dx = \int \frac{\sin x \, t}{1 - t} \left(-\frac{dt}{\sin x} \right) = -\int \frac{t}{1 - t} \, dt = \int \frac{t}{t - 1} \, dt = (1)$$

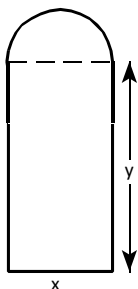
$$(1) = \int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = t + \ln |t-1| = \cos x + \ln |\cos x - 1| = \cos x + \ln (1 - \cos x)$$

t	$\frac{t-1}{1}$
$\frac{-t+1}{1}$	1

$$\text{Así pues: } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} \, dx = \left[\cos x + \ln (1 - \cos x) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + \ln \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right) \right) - \left(\cos \frac{\pi}{4} + \ln \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + \ln \left(\frac{1}{2} : \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + \ln \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} - \ln (2 - \sqrt{2})$$

c)



La función que debe ser máxima es la superficie:

$$S(x) = xy + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 = xy + \frac{1}{8} \pi x^2$$

Relación entre las variables x e y:

$$x + 2y + \frac{1}{2} 2\pi \frac{x}{2} = 5 \Rightarrow 2y = 5 - x - \frac{\pi}{2} x \Rightarrow y = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) x = \frac{5}{2} - \frac{2 + \pi}{4} x$$

La función es entonces: $S(x) = \frac{5}{2}x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 = \frac{5}{2}x - \frac{4+\pi}{8}x^2$

Veamos dónde tiene su máximo: $S'(x) = \frac{5}{2} - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} : \frac{4+\pi}{4} = \frac{10}{4+\pi}$

Comprobemos que se trata de un máximo: $S''(x) = -\frac{4+\pi}{4} < 0 \Rightarrow$ se trata, en efecto, de un máximo.

El valor de y: $y = \frac{5}{2} - \frac{2+\pi}{4} \cdot \frac{10}{4+\pi} = \frac{5}{2} - \frac{10+5\pi}{8+2\pi} = \frac{40+10\pi-20-10\pi}{16+4\pi} = \frac{20}{16+4\pi} = \frac{5}{4+\pi}$

www.yoquieroaprobar.es