



Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Sea " m " una constante real. Determine para qué valores de " m " el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \\ 4x - y + m^2z &= m - 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{pmatrix}$

El único menor de orden 3 de A es:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = 15m^2 + 16 - 4 - 24 + 5 - 8m^2 = 7m^2 - 7 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 1$$

Tenemos entonces:

- Para $m \neq -1$ y $m \neq 1$: $\text{rg}A = \text{rg}B = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Para $m = -1$: $\text{rg}A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 \neq 0$.

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 16 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}B = 3$$

Y como $\text{rg}A \neq \text{rg}B \Rightarrow$ el sistema es incompatible para $m = -1$.

- Para $m = 1$: el menor de B resultante de orlar el menor no nulo de A es ahora: $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}B = 2$

Luego $\text{rg}A = \text{rg}B = 2 < \text{n}^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado para $m = 1$.

2. (2 puntos)

a) (1,5 puntos) Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x - 2y + z = 1 \quad \pi' : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + k\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real k .

- b) (0,5 puntos) Determine el ángulo que forman esos planos cuando $k = 3$.

SOLUCIÓN.

a) El vector $\vec{n} = (1, -2, 1)$ es perpendicular al plano π .

Los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, k, -1)$ están contenidos en el plano π' y, por tanto, el vector $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$ es

$$\text{perpendicular a } \pi': \quad \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2k\vec{k} - \vec{k} + 2\vec{j} = (-1, 2, 2k-1)$$

Los dos planos pueden ser: coincidentes o paralelos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección o secantes si los vectores tienen distinta dirección.

Los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección si sus coordenadas son proporcionales:

$$\vec{n} // \vec{n}' \Leftrightarrow \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{2k-1} \Rightarrow 2k-1 = -1 \Rightarrow k = 0$$

Tenemos entonces:

Para $k=0$: $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección $\Rightarrow$ los planos coinciden o son paralelos. Para precisar su posición veamos si tienen algún punto común (coinciden) o no tienen puntos comunes (paralelos).

El punto $P(2\lambda + \mu, \lambda, 1 - \mu)$ es un punto cualquiera de π' . Veamos si pertenece también al plano π comprobando si verifica o no su ecuación: $2\lambda + \mu - 2\lambda + 1 - \mu = 1 \Rightarrow P \in \pi \Rightarrow$ los planos son coincidentes.

Para $k \neq 0$: los vectores tienen distinta dirección y los planos son secantes.

b) Para $k=3$ los planos π y π' son secantes. El ángulo que forman coincide con el ángulo que forman sus vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}'$: $\vec{n} = (1, -2, 1)$, $\vec{n}' = (-1, 2, 5)$.

$$\cos \alpha = \cos(\pi, \pi') = \cos(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| |\vec{n}'|} = \frac{-1 - 4 + 5}{\sqrt{1+4+1} \sqrt{1+4+25}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{los planos son perpendiculares.}$$

3. (4 puntos) Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)}$$

a) (0,5 puntos) Determine el dominio de la función.

b) (1,5 puntos) Determine, si existen, sus asíntotas.

c) (2 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $f(x)$ es una función racional. Su dominio está formado por todos los valores reales que no anulen el denominador.

$$\text{Por tanto: } \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) Asíntotas verticales: $x = -1$ pues $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(1+x)} = \infty$

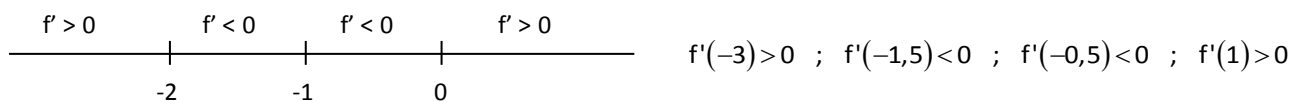
Asíntotas horizontales: no existen pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1+x)} = \infty$

Asíntotas oblicuas $y = mx + n$:

$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+x^2} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - x^2}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{1+x} \right) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = x - 1$$

$$c) f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2} = \frac{x(2+x)}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow x(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 0 \quad (\text{valores críticos})$$

Estudiamos el signo de la primera derivada en los intervalos cuyos extremos son los valores críticos y el punto de discontinuidad $x = -1$: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, +\infty)$



Luego la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-2, -1)$ y $(-1, 0)$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento nos ofrecen la siguiente información:

La función tiene un máximo relativo en $x = -2$: $(-2, -4)$ y un mínimo relativo en $x = 0$: $(0, 0)$

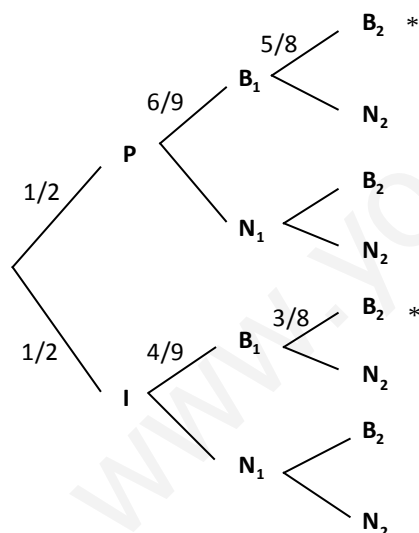
4. (1 punto) Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja A contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja B contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja A, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja B, también una tras otra, sin reponer ninguna.

¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: P = "sale par al lanzar el dado", I = "sale impar al lanzar el dado", B_1 = "la primera bola extraída es blanca", N_1 = "la primera bola extraída es negra", B_2 = "la segunda bola es blanca y N_2 = "la segunda bola es negra".

Representemos la situación mediante un diagrama en árbol:



Se trata de una aplicación del teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2) &= p(P) \cdot p(B_1 \cap B_2) + p(I) \cdot p(B_1 \cap B_2) = \\ &= p(P) \cdot p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) + p(I) \cdot p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{30}{144} + \frac{12}{144} = \frac{42}{144} = \frac{7}{24} \approx 0,2917 \end{aligned}$$

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 3k+2 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k .

b) (1 punto) Si $k = 2$, calcule la inversa de A , si existe.

c) (1 punto) Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k .

SOLUCIÓN.

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 3k+2 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = -k^2 - 4k = -k(k+4) = 0 \Rightarrow k=0, k=-4 \Rightarrow \exists A^{-1} \forall k \neq -4 \text{ y } 0$$

b) Para $k=2$, existe la matriz inversa de A pues $|A| = -2 \cdot 6 = -12 \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)^*} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ -8 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)^t} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 8 & -6 & -8 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1} = 1/|A| \cdot (\text{Adj } A)^t} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$$

*Adjuntos de los elementos de A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8, A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -8, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -8, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Así pues: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

c) ▪ Según el apartado a): $\text{rg } A = 3 \quad \forall k \neq -4 \text{ y } 0$

▪ Para $k = -4$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

▪ Para $k = 0$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

2. (2 puntos)

a) (1,5 puntos) Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P: (2, 1, -1)$.

b) (0,5 puntos) Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi : 2x - 3y + z = 4$$

$$\pi' : y + z = 0$$

SOLUCIÓN.

a) Necesitamos un punto y un vector direccional. El punto es el dado, $P(2, 1, -1)$, y como vector direccional nos sirve cualquiera de los vectores direccionales de la recta r . Para obtenerlo necesitamos dos puntos cualesquiera de r :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para } z=0: y=0, x=2 \Rightarrow A(2, 0, 0) \\ \text{Para } z=-1: y=1, x=4 \Rightarrow B(4, 1, -1) \end{array} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$$

$$\text{La recta pedida es entonces: } \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} \\ \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=2y-2 \\ -y+1=z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

b) El ángulo α que forman los dos planos es el mismo que el que forman sus vectores normales: $\vec{n} = (2, -3, 1)$ y $\vec{n}' = (0, 1, 1)$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| |\vec{n}'|} = \frac{-3+1}{\sqrt{4+9+1} \sqrt{0+1+1}} = \frac{-2}{\sqrt{28}} = \frac{-2}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7} \approx -0,378 \Rightarrow \alpha = 112^\circ 12' 27,56''$$

3. (4 puntos)

a) (1 punto) Determine los valores de "a" y "b" para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 1/e^x & \text{si } x \leq 0 \\ a \cos(x) + b & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \sin(x) - ax & \text{si } \pi < x \end{cases}$$

b) (1,5 puntos) Calcule la integral:

$$\int x^2 (\ln x)^2 dx$$

c) (1,5 puntos) Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (e^{(x-1)} - 1)^{(x-1)}$$

SOLUCIÓN.

a) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas en los intervalos en que están definidas. Debemos exigir entonces que la función sea continua en $x=0$ y en $x=\pi$, y para que esto ocurra debe ser: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \cos x + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} (a \cos x + b) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\sin x - ax) = -a \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ (1 - \pi)a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 - \pi)a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2 - \pi}, \quad b = 1 - a = 1 - \frac{1}{2 - \pi} = \frac{1 - \pi}{2 - \pi}$$

b) Utilizaremos el método de integración por partes: $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

$$\int x^2 (\ln x)^2 dx = \left| \begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \int \frac{1}{3} x^3 2 \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{x} dx \right] = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{9} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{9} \frac{x^3}{3} + K = \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 + K$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - 1)^{x-1} = 0^0$ indeterminación. Sea $L = \lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - 1)^{x-1}$, aplicamos logaritmo neperiano a los dos miembros:

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - 1)^{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln (e^{x-1} - 1)^{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \ln (e^{x-1} - 1) \right] = 0 \cdot (-\infty) \text{ (x debe tender a } 1^+) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln (e^{x-1} - 1)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (aplicamos la regla de L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{e^{x-1}}{e^{x-1} - 1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 e^{x-1}}{-e^{x-1} + 1} = \frac{0}{0} \text{ (aplicamos de nuevo la regla de$$

$$\text{L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)e^{x-1} + (x-1)^2 e^{x-1}}{-e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}(x-1)(2+x-1)}{-e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(x-1)(1+x)] = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

4. (1 punto) En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) (0,5 puntos) Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) (0,5 puntos) Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

SOLUCIÓN.

Sean M el suceso "aprueba Matemáticas" e I el suceso "aprueba Inglés".

$$\text{Se tiene: } p(M) = \frac{60}{100} = 0,6 \quad ; \quad p(I) = 0,5 \quad ; \quad p(M \cap I) = 0,3$$

a) Se trata de calcular la probabilidad de la unión de ambos sucesos:

$$p(M \cup I) = p(M) + p(I) - p(M \cap I) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$$

$$\text{b) } p(M/I) = \frac{p(M \cap I)}{p(I)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

