SISTEMAS DE ECUACIONES

ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

Uno de los principales objetivos del Álgebra clásica ha sido la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Desde este punto de vista, el Álgebra tendría más de 2000 años de antigüedad pero hasta la Edad Media no se desarrolla de mano de los árabes. Después, alcanza su madurez y esplendor en Europa, sobre todo en el renacimiento italiano.

2.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición 1: Se llama **ecuación lineal con n incógnitas** a toda ecuación polinómica de primer grado con n incógnitas.

Definición 2: Llamamos **sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas** a todo conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Se expresa en la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

A lo largo de la unidad solo abordaremos el estudio de los sistemas lineales de ecuaciones, por lo que, frecuentemente nos referiremos a ellos como sistemas de ecuaciones, sin decir lineales y suponiendo que lo son.

Definición 3: Dado un sistema lineal como (1), llamamos **solución del sistema** a toda n-upla de números reales que satisfagan las m ecuaciones de la expresión (1).

Definición 4: Dos **sistemas** se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

3.- CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

Definición 5: Un sistema de ecuaciones se dice que es:

a) **Sistema incompatible (S.I.)** cuando no tiene solución.
b) **Sistema compatible determinado (S.C.D.)** cuando tiene una única solución.
c) **Sistema compatible indeterminado (S.C.I.)** cuando tiene infinitas soluciones.

Clasificar o discutir un sistema es determinar cuántas soluciones tiene, es decir, determinar si es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado. A lo largo de la unidad, concretamente en el punto 6, abordaremos la discusión de sistemas con más profundidad.

Nota 1: **(Transformaciones equivalentes en sistemas lineales).** Las siguientes transformaciones en un sistema dan lugar a sistemas equivalentes:

a) Multiplicar (o dividir) una ecuación por un escalar no nulo.
b) Sumarle a una ecuación una combinación lineal de las restantes.
c) Eliminar una ecuación que sea combinación lineal de otras del sistema.

4.- EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA

Nota 2: **(Expresión matricial de un sistema)** Sin más que recordar el producto de matrices, todo sistema lineal como el visto en la definición 2, se puede expresar matricialmente de acuerdo con la expresión: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

A partir de esta igualdad, llamando $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$,

podemos escribir la llamada **expresión matricial del sistema**, que sería $A \cdot X = B$

A la matriz A se le llama **matriz de** coeficientes y, aunque de momento no la usaremos, definimos también la **matriz ampliada del sistema** como la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1: El sistema $\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases}$ es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Es inmediato ver que $x=5$, $y=0$, $z=-2$ es una solución del sistema. Se trata de un sistema compatible determinado. Su expresión matricial es: $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$, siendo su matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

5.- RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

En este punto de la unidad veremos los diferentes métodos que usaremos para resolver sistemas lineales de ecuaciones. Comenzaremos por el método quizás menos usado por ser el que más operaciones requiere y porque está quizás más relacionado con el cálculo matricial que con los sistemas de ecuaciones. A continuación veremos el método de Gauss, el más universal y eficaz que, además sirve para resolver cualquier tipo de sistemas. Finalmente abordaremos la regla de Cramer, bastante rápida y eficaz pero limitada a sistemas concretos.

5.1.- Método matricial o de la matriz inversa

El método matricial es un método de resolución de sistemas lineales basado en el cálculo matricial. Supongamos un sistema general como el sistema (1) de la definición 2 y consideremos su expresión matricial $A \cdot X = B$ tal y como hemos visto en la nota 2. Realmente hemos transformado un sistema lineal en una ecuación matricial. En el caso en que A sea regular, existirá la matriz inversa de A, por lo que multiplicando a izquierda en ambos miembros de la expresión matricial nos queda que $X = A^{-1}B$, que es justo lo que hicimos en la unidad anterior cuando resolvíamos ecuaciones matriciales.

Ejemplo 2: Consideremos el sistema $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$. Entonces, su expresión matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así pues, llamando: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El sistema lineal es equivalente a la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Ahora bien, es inmediato ver que: $|A| = 4$. Así pues, A es regular siendo $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Así pues, despejando X de la forma habitual $X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$

Se propone la **Actividad 1**

5.2.- Método de Gauss

Como hemos comentado antes, el método de Gauss es el más universal y eficaz de todos los métodos ya que computacionalmente es bastante eficiente y además es válido para todo tipo de sistemas. Por ello, es el más recomendado en la mayoría de los casos. Su mecanismo lo hemos visto ya en la unidad de matrices. Básicamente consiste en transformar el sistema de partida en otro equivalente que sea escalonado mediante transformaciones equivalentes (ver nota 1). Para ahorrar tiempo, estas transformaciones se suelen hacer directamente sobre la matriz ampliada del sistema (por filas), ya que las incógnitas no sufren modificación alguna en ninguna de las transformaciones. Una vez obtenido un sistema equivalente pero escalonado, se pueden ir sustituyendo los valores de la incógnita de abajo a arriba (fase de subida) hasta determinarlas todas. Veámoslo más claramente con un ejemplo de cada tipo:

Ejemplo 3:

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 - 5F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{pmatrix} \approx$

$\underset{F_3' = F_3 + 11F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \rightarrow x = 2y - z + 3 = 0 + 2 + 3 = 5 \\ -y + z = -2 \rightarrow y = z + 2 = -2 + 2 = 0 \\ 13z = -26 \rightarrow z = -2 \end{cases}$

Por tanto, se trata de un S.C.D., cuya solución es: $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$

b) $\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases} \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 - 5F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & 21 \end{pmatrix} \underset{F_3' = 2F_3 - F_2}{\approx}$

$\approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2' = \frac{1}{2}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 7y - 17z = -21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + 17\lambda \\ z = 7\lambda \text{ (Lo elegimos)} \end{cases}$

Se trata, pues, de un S.C.I.

c) $\begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 2x-y+15z=3 \\ x-8y-21z=11 \end{cases} \rightarrow A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_3^{'}=F_3-F_1}{\overset{F_2^{'}=F_2-2F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & -5 & -19 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_3^{'}=F_3+F_2}{\approx}$

$\approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 5y+19z=-11 \\ 0=-7 \end{cases}$, sistema que es evidentemente un S.I. ya que la última ecuación carece de solución y resulta una contradicción.

Se propone la **Actividad 2**

5.3.- Sistemas de Cramer. Regla de Cramer

Definición 6: Se dice que un **sistema** lineal de ecuaciones es **de Cramer** si su matriz de coeficientes es cuadrada y regular, es decir, con determinante no nulo.

Proposición 1: **(Regla de Cramer)** Sea $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+......+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+......+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2.........+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ un sistema de Cramer. Entonces es un sistema compatible determinado y la solución viene dada por:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad , \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ ,........ \ x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & ... & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ejemplo 4: Resolvamos el siguiente sistema por Cramer: $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$. Lo primero es ver que efectivamente es de Cramer. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4\neq 0 \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$.

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{8}{4}=2 \quad , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-8}{4}=-2 \quad , \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Se propone la **Actividad 3.**

Nota 3: Aunque la regla de Cramer está diseñada y es adecuada para sistemas de Cramer, puede aplicarse una variante de la misma para sistemas compatibles cualesquiera. Como veremos más adelante (Teorema de Rouché-Fröbenius), un sistema es compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes coincide con el de la matriz ampliada y determinado cuando dicho rango común coincide con el número de incógnitas. Eliminando las ecuaciones que sean combinación lineal de las demás y nombrando con parámetros aquellas cuyas columnas sean combinación lineal de las demás, podemos aplicar la regla de Cramer al nuevo sistema. Veámoslo más claramente con un ejemplo:

Ejemplo 5: Analicemos el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = 15 \\ 11x - y = 21 \end{cases}$. Es fácil ver que: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Además, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$. Así pues, $\text{rg} A = 2$ y la 2ª columna depende linealmente de las otras dos. Es también fácil ver que $\text{rg} A^* = 2$. Como veremos más adelante, esto implica que el sistema es compatible indeterminado en función de un parámetro que, lógicamente podemos tomar y (ya que es la incógnita que no interviene en el menor de orden 2 tomado). Así pues, si llamamos $y = \lambda$, el sistema queda equivalente a $\begin{cases} 3x + z = 2 + 2y \\ 11x = 21 + y \end{cases}$, que ya sí es un sistema de Cramer en función de λ, por lo que la solución del sistema es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 1 \\ 21+\lambda & 0 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-21-\lambda}{-11} = \frac{21}{11} + \frac{1}{11}\lambda \quad , \quad y = \lambda \quad , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2+2\lambda \\ 11 & 21+\lambda \end{vmatrix}}{-11} = \frac{41-19\lambda}{-11} = \frac{-41}{11} + \frac{19}{11}\lambda$$

Como podemos ver en el ejemplo, no es el método más adecuado para SCI ya que es bastante más largo que el de Gauss.

6.- DISCUSIÓN DE SISTEMAS. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Discutir o clasificar un sistema es decir de qué tipo es: compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Antes de resolverlo podemos determinar de qué tipo es. El resultado para discutir un sistema es el siguiente teorema:

Proposición 2: (Teorema de Rouché-Fröbenius) Sea: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sea A su matriz de coeficientes y A* su matriz ampliada como de costumbre. Entonces:

a) Si $\text{rg} A = \text{rg} A^* = n \rightarrow$ El sistema es compatible determinado (S.C.D.)
b) Si $\text{rg} A = \text{rg} A^* < n \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado (S.C.I.)
c) Si $\text{rg} A \neq \text{rg} A^* \rightarrow$ El sistema es incompatible (S.I.)

Nota 4: Es importante tener en cuenta que $\mathrm{rg}A \le \mathrm{rg}A^*$, ya que A* tiene siempre las mismas filas que A y una columna más. Este detalle, aunque muy simple, es de enorme utilidad ya que nos ahorra en muchas ocasiones, tener que determinar $\mathrm{rg}A^*$.

Nota 5: En muchas ocasiones los sistemas dependerán de uno o dos parámetros, cosa que complica sustancialmente la discusión. Por ello, tendremos que distinguir los diferentes casos en función de los rangos de A y de A*.

Ejemplo 6: Estudiemos la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases} \rightarrow A^*=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que $|A|=13\neq 0 \rightarrow \mathrm{rg}A=3$. Ahora bien, como A* tiene solo 3 filas y siempre $\mathrm{rg}A \le \mathrm{rg}A^* \rightarrow \mathrm{rg}A^*=3 \xrightarrow{Rouché-Fröbenius} S.C.D.$

b) $\begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 5x-y+z=8 \\ x+4y-10z=-11 \end{cases} \rightarrow A^*=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{pmatrix}$. Es inmediato ver que $|A|=0$. Así pues, $\mathrm{rg}A<3$. Si consideramos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \rightarrow \mathrm{rg}A=2$. Analicemos ahora $\mathrm{rg}A^*$. Si orlamos con la 3ª columna, nos queda $|A|=0$, así pues, la 3ª columna depende linealmente de las dos primeras, con lo que $\mathrm{rg}A^*=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 5 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & -11 \end{pmatrix}=2$, ya que su determinante es fácil ver que da cero. Así pues, $\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A^*=2<3 \xrightarrow{Rouché-Fröbenius} S.C.I.$

c) $\begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 2x-y+15z=3 \\ x-8y-21z=11 \end{cases} \rightarrow A^*=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 15 & 3 \\ 1 & -8 & -21 & 11 \end{pmatrix}$. Es inmediato ver que $|A|=0$ y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=5\neq 0 \rightarrow \mathrm{rg}A=2$. Veamos ahora $\mathrm{rg}A^*$. Al igual que en el apartado b, si orlamos con la 3ª columna, como $|A|=0$, entonces dicha columna depende linealmente de las dos primeras, luego $\mathrm{rg}A^*=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -8 & 11 \end{pmatrix}=3$, porque su determinante es $-35\neq 0$.

Así pues, $\mathrm{rg}A \neq \mathrm{rg}A^* \xrightarrow{Rouché-Fröbenius} S.I.$

Ejemplo 7: Veamos ahora un ejemplo con parámetros:

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases} \rightarrow A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=a^3-3a+2=0 \leftrightarrow a=1\ (doble),\ a=-2.$$

Veamos los diferentes casos que se pueden dar:

Caso 1: Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}A = \text{rg}A^* = 3 \overset{R-F}{\rightarrow} S.C.D.$

Caso 2: Si $a = 1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con lo que, claramente $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 1$, ya que todos los menores de A* de órdenes mayor que 1 son nulos al ser todas las filas y columnas iguales. Así pues $\text{rg}A = \text{rg}A^* = 1 < 3 \rightarrow S.C.I.$

Caso 3: $a = -2 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Es evidente que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rg}A = 2$. Si orlamos por la 4ª columna $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{rg}A^* = 3$. Luego $\text{rg}A \neq \text{rg}A^* \rightarrow S.I.$

Se propone la **Actividad 4**.

7.- SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Definición 7: Un **sistema** de ecuaciones se llama **homogéneo** cuando la columna de términos independientes esté formada por ceros, es decir, cuando es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nota 6: Es evidente, al ser $\text{rg}A = \text{rg}A^*$, que un sistema homogéneo es siempre compatible. Será determinado cuando $\text{rg}A = n$ e indeterminado cuando $\text{rg}A < n$. Además tiene siempre una solución, llamada **solución trivial**, que es: $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots\dots\dots x_n = 0$.

Ejemplo 8: Veamos un par de ejemplos:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$. Es evidente que se trata de un sistema homogéneo. Veamos si es compatible determinado o indeterminado. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rg}A = \text{rg}A^* = 3 \rightarrow S.C.D.$

Evidentemente al ser compatible determinado, su solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \\ 2x-4y-z=0 \end{cases} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0$. Pero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A^*=2 \rightarrow S.C.I.$

Para resolverlo nos podemos quedar con las dos primeras ecuaciones, ya que son las filas del menor no nulo y, por tanto, la 3ª fila depende de las dos primeras. Así pues:

$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$. Aplicando Gauss $\rightarrow$ $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$. Llamando $y=\lambda \rightarrow \begin{cases} x=3\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$.

Se propone la **Actividad 5**.

8.- ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS

La eliminación de parámetros es una herramienta necesaria, sobre todo para unidades posteriores que consiste en el problema inverso a resolver un S.C.I., es decir, eliminar uno o varios parámetros es encontrar un sistema lineal cuyas soluciones sean las dadas. El número de ecuaciones del sistema es el número de incógnitas menos el número de parámetros. Conviene también tener en cuenta que las ecuaciones no son únicas, sino que dependen de ciertas elecciones que haremos en los métodos. Veámoslo más claramente con un ejemplo:

Ejemplo 9: Eliminemos el parámetro del sistema: $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=5-\lambda \end{cases}$. Como hay 3 incógnitas y 1 parámetro, el número de ecuaciones será 3-1=2. Hay dos formas de hacerlo:

- 1ª Forma: Despejar los parámetros y sustituir en el resto de ecuaciones.

$$\begin{cases} x=-1+\lambda \rightarrow \lambda=x+1 \\ y=2-3\lambda \\ z=5-\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2-3(x+1) \\ z=5-(x+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+y=-1 \\ x+z=4 \end{cases}$$

- 2ª Forma: Utilizando el rango.

Es evidente que: $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=5-\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1=\lambda \\ y-2=-3\lambda \\ z-5=-\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, con lo que la columna $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix}$ depende linealmente de la columna $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y, por tanto $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ y-2 & -3 \\ z-5 & -1 \end{pmatrix}=1$. Por tanto, todos los menores de orden 2 deben ser nulos. Elegimos dos de ellos y nos proporcionan las ecuaciones: $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-2 & -3 \end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ z-5 & -1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \begin{cases} -3x-y=1 \\ x-z=4 \end{cases}$.

Ejemplo 10: Veamos ahora un ejemplo con dos parámetros: $\begin{cases} x = 1-\alpha+\beta \\ y = -2+3\alpha-2\beta \\ z = -1-\alpha+7\beta \end{cases}$

- 1ª Forma: Despejar los parámetros y sustituir en el resto de ecuaciones. Son 3-2=1 ecuación.

$\begin{cases} x = 1-\alpha+\beta \rightarrow \alpha = 1+\beta-x \\ y = -2+3\alpha-2\beta & \rightarrow y = -2+3(1+\beta-x)-2\beta \rightarrow \beta = 3x+y-1. \\ z = -1-\alpha+7\beta & \rightarrow z = -1-(1+\beta-x)+7\beta \rightarrow \beta = \dfrac{-x+z+2}{6} \end{cases}$ Igualando las

dos expresiones de $3x+y-1 = \dfrac{-x+z+2}{6} \rightarrow 19x+6y-z=8$

- 2ª Forma: Utilizando el rango.

Razonando como antes: $\text{rg}\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 3 & -2 \\ z+1 & -1 & 7 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 3 & -2 \\ z+1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{Fácil}} 19x+6y-z-8=0$

Se propone la **Actividad 6**

9.- ACTIVIDADES

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Resuelve los sistemas siguientes utilizando el método matricial:

a) $\begin{cases} x-y-z=6 \\ -x+3z=2 \\ -2x+5y-3z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y+z=23 \\ 5x+4y+z=42 \\ x+2y-3z=10 \end{cases}$

Actividad 2: Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 5x-y+z=8 \\ x+4y-10z=-11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y-2z=7 \\ 2x-y+15z=3 \\ x-8y-21z=11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ -2x-3y+z=2 \\ 5x-y+z=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{cases}$

Actividad 3: Resuelve los siguientes sistemas utilizando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x+2y-z=12 \\ 2x+y+z=9 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+5y-3z=7 \\ 2x-y+z=11 \\ 4x+3y-4z=3 \end{cases}$

Actividad 4: Discute los siguientes sistemas en función del parámetro:

a) $\begin{cases} x+y+kz=1 \\ kx+(k-1)y+z=k \\ x+y+z=k+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=7 \\ mx-y=11 \\ x-4y=m \end{cases}$

Actividad 5: Discute y resuelve los sistemas homogéneos siguientes:

a) $\begin{cases} 3x-5y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+3z=0 \\ x-5y-9z=0 \end{cases}$

Actividad 6: Elimina los parámetros en los siguientes casos:

a) $\begin{cases} x=3+4\lambda+5\mu \\ y=2-\lambda+\mu \\ z=4+\lambda-3\mu \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=3-4\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=1+2\alpha+3\beta \\ y=2+\alpha-\beta \\ z=3-\alpha+3\beta \\ t=3\alpha-\beta \end{cases}$

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 7: Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+2y-z=1 \\ 2x-4y+2z=3 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$

Actividad 8: Estudia los siguientes sistemas y resuélvelos por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ x-4y-5z=1 \\ -2x+2y+4z=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+y+3z=-2 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x+4y-7z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y+z=-1 \\ x-y=1 \\ x+2y+3z=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x+2y+3z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ x-2y+2z=-3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+3z-14t=0 \\ 2x-2y+3z+t=0 \\ 3x-3y+5z+6t=0 \end{cases}$

Actividad 9: Resuelve los siguientes sistemas utilizando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 3y+2z=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ x-2y-3z=1 \\ -x-y+z=-3 \end{cases}$

Actividad 10: Resuelve los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \\ 4x+3y=m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+z=3 \\ x+2y+5z=m \end{cases}$

Actividad 11: Dado el sistema $\begin{cases} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \end{cases}$

a) Clasifícalo y resuélvelo.
b) Añade al sistema una ecuación de modo que resulte otro sistema compatible indeterminado
c) Lo mismo para que resulte compatible determinado.
d) Lo mismo para que resulte incompatible.

Actividad 12: Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:

a) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -x+y/2=-2 \\ x+ky=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{cases}$

Actividad 13: Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{cases}$.

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.
b) Discute si existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado.
c) Resuelve el sistema para $a=0$.

Actividad 14: Discute los siguientes sistemas en función del parámetro a y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados:

a) $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+y-z=0 \\ 2x+ay=2 \\ -x+z=1 \end{cases}$

Actividad 15: Discute los siguientes sistemas en función del parámetro:

a) $\begin{cases} (m-1)x - my = 2 \\ 6mx - (m-2)y = 1-m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + +y + bz = b+2 \\ x + by + z = b \\ bx + y + z = -2(b+1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} px + y - z = 0 \\ px + (1-p)y = 0 \\ px + 2y - (1+p)z = 0 \end{cases}$

Actividad 16: Cierta marca de pintura es elaborada con tres ingredientes: A, B y C, comercializándose en tres tonos diferentes. El primero se prepara con 2 unidades de A, 2 de B y 1 de C; el segundo con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C, y el tercero con una unidad de cada ingrediente. El bote del primer tono se vende a 23 €, el segundo a 19 € y el tercero a 14 €. Sabiendo que el margen comercial (o ganancia) es de 3 € por bote, ¿qué precio por unidad tienen cada uno de los tres ingredientes?

Actividad 17: En una reunión, cierta parte de los presentes está jugando; otra parte está charlando y, el resto, que es la cuarta parte, está bailando. Más tarde, 4 cambian el juego por el baile, 1 deja la charla y se pone a jugar y dos dejan el baile y se ponen a charlar. Tras estos cambios, el número de personas que practican cada una de las tres actividades es el mismo. ¿Cuántas personas hay en la reunión?7

Actividad 18: Para un partido de fútbol se ponen a la venta tres tipos de localidades: Fondo, General y Tribuna. Se sabe que la relación entre los precios de las localidades de Tribuna y General es 4/3 y entre General y fondo es 6/5. Si al comprar tres localidades, una de cada clase, se pagan en total 28,5 €, ¿cuál es el precio de cada tipo de localidad?

Actividad 19: Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a tres tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y la tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad de electrodomésticos solicitó cada tienda?

Actividad 20: La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades del padre, madre e hijo es 80 años y, dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Actividad 21: En cierta heladería de Sevilla, por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34 € un día. Otro día, por 4 copas de la casa y 4 horchatas te cobran 44 €, y un tercer día, te piden 26 € por una horchata y cuatro batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?

Actividad 22: Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

Actividad 23: Un joyero tiene tres clases de monedas: A, B y C. Las monedas de tipo A tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo B tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo C tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?

Actividad 24: Un autobús transporta 90 viajeros con 3 tarifas diferentes:

1ª: Viajeros que pagan el billete entero, que vale 0.70 euros.
2ª: Estudiantes, con descuento del 50%.
3ª: Jubilados, con descuento del 80%.

Se sabe que el número de estudiantes es 10 veces el de jubilados y que la recaudación total ha sido de 46,76 euros. Plantea, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar el número de viajeros, de cada tarifa, que va en el autobús.

Actividad 25: Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que uno de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

Actividad 26: En una tienda de supermercado ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos. El primer lote está compuesto por un jamón, tres quesos y siete chorizos y su precio es de 565 €. El segundo lote lleva un jamón, cuatro quesos y diez chorizos y su precio es de 740 €. ¿Podrías averiguar cuándo debería valer un lote formado por un jamón, un queso y un chorizo? Justifica la respuesta.

Actividad 27: Los lados de un triángulo miden 7, 8 y 9 cm. Con centro en cada vértice se dibujan tres circunferencias tangentes entre sí dos a dos. Calcula la longitud de los radios de dichas circunferencias.

Actividad 28: Dos amigos invierten 20000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés; una cantidad B, al 5%, y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%; la B, al 6%, y el resto, al 4%. Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1050 €, y el segundo, de 950 €.

Actividad 29: Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a lo que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 30: (2003) Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.
b) Resuelve el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas las soluciones.

Actividad 31: (2003) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&m&3\\4&1&-m\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ y X=$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m existe A^{-1}?
b) Siendo $m=2$, calcula A^{-1} y resuelve el sistema $A\cdot X=B$.
c) Resuelve el sistema $A\cdot X=B$ para $m=1$.

Actividad 32: (2003) Consideremos el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x&+&my&-&z&=&-2+2my\\ mx&-&y&+&4z&=&5+2z\\ 6x&-&10y&-&z&=&-1\end{array}\right\}$

a) Discute las soluciones del sistema según los valores de m.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Actividad 33: (2003) Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Actividad 34: (2004)

a) Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&-4&-2\\-1&a-1&a\end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de *a*?

b) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&-4&-2\\-1&-6&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Actividad 35: (2004) Se sabe que el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{rcrcr} x&+&\alpha y&=&1\\ x&+&\alpha z&=&1\\ y&+&z&=&\alpha\end{array}\right\}$ tiene una única solución.

a) Prueba que $\alpha\neq 0$.
b) Halla la solución del sistema.

Actividad 36: (2004) Determina *a* y *b* sabiendo que el sistema de ecuaciones

$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x&+&3y&+&z&=&1\\ -x&+&y&+&2z&=&-1\\ ax&+&by&+&z&=&4\end{array}\right\}$ tiene al menos dos soluciones distintas.

Actividad 37: (2004) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \lambda y & & & = & \lambda \\ \lambda x & + & y & + & (\lambda-1)z & = & 1 \\ \lambda x & + & y & & & = & 2+\lambda \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Actividad 38: (2004) Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos A, B y C. El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo A, a 3 € las del tipo B y a 4 € las del tipo C, entonces obtiene un total de 20 €. Pero si vende a 1 € las del tipo A, a 3 € las del B y a 6 € las del C, obtiene un total de 25 €.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.
b) Resuelve dicho sistema.
c) ¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).

Actividad 39: (2004) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & my & & & = & m \\ 2x & + & mz & & & = & 0 \end{array}\right\}$

a) Determina los valores de *m* para los que $x=0$, $y=1$ y $z=0$, es solución del sistema.
b) Determina los valores de *m* para los que el sistema es incompatible.
c) Determina los valores de *m* para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

Actividad 40: (2004) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 13y & + & 2z & = & 0 \\ (a+2)x & - & 12y & + & 12z & = & 0 \end{array}\right\}$

Determina el valor de a para que tenga soluciones distintas de la solución trivial y resuélvelo para dicho valor de *a*.

Actividad 41: (2004) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcl} mx & - & y & = & 1 \\ x & - & my & = & 2m-1 \end{array}\right\}$.

a) Clasifica el sistema según los valores de *m*.
b) Calcula los valores de *m* para los que el sistema tiene una solución en la que $x=3$.

Actividad 42: (2005) Considera el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & -2 \\ -\lambda x & + & 3y & + & z & = & -7 \\ x & + & 2y & + & (\lambda+2)z & = & -5 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema cuando se compatible indeterminado.

Actividad 43: (2005) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ & & mx & + & 2z & = & 0 \\ & & my & - & z & = & m \end{array}\right\}$

a) Determina los valores de m para los que el sistema tiene una única solución. Calcula dicha solución para $m=1$.
b) Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.
c) ¿Hay algún valor de m para el que el sistema no tiene solución?

Actividad 44: (2005) Considera el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} (b+1)x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & (b+1)y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & (b+1)z & = & -4 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro b.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Actividad 45: (2005) Considera el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & + & (m+4)z & = & my \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$

a) Determina los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única.
b) Resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones y da una solución en la que se cumpla que $x=19$.

Actividad 46: (2005) Álvaro, Marta y Guillermo son tres hermanos. Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres juntan 84 euros.

Actividad 47: (2005) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 2 \\ mx & + & y & + & z & = & m \end{array}\right\}$

a) ¿Para qué valores de m el sistema tiene al menos dos soluciones?
b) ¿Para qué valores de m el sistema admite solución en la que $x=1$?

Actividad 48: (2005) En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Actividad 49: (2006) Resuelve: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Actividad 50: (2006) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tiene inversa.
b) Para $m=0$ y siendo $X=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, resuelve $XA=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Actividad 51: (2006) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor $m \in \mathbb{R}$ para que la matriz A no tiene inversa.
b) Resuelve $AX=O$ para $m=3$.

Actividad 52: (2006) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ.
b) Resuélvelo para $\lambda=2$.

Actividad 53: (2006) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & - & y & - & z & = & -1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & \lambda+2 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=2$.

Actividad 54: (2006) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 8 \\ \lambda x & + & y & + & \lambda z & = & 10 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=2$.

Actividad 55: (2006) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 3x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda-1 \\ 2x & + & \lambda y & & & = & -2 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=1$.

Actividad 56: (2007) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & a+2 \end{array}\right\}$

a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga incompatible indeterminado.
b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a=-2$.

Actividad 57: (2007)

a) Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior. $\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ y & + & z & = & -2 \\ x & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$

Actividad 58: (2007) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & \lambda y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda-1 \end{array}\right\}$

a) Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=1$.

Actividad 59: (2007) Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a.
$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (a+1)y & + & 2z & = & y \\ x & - & 2y & + & (2-a)z & = & 2z \end{array}\right\}$

Actividad 60: (2007) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales
$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda x & + & y & + & (\lambda+1)z & = & \lambda+2 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (1-\lambda)x & - & \lambda y & = & 0 \end{array}\right\}$ tiene más de una solución.

a) Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ.
b) Halla todas las soluciones del sistema.

Actividad 61: (2007) Resuelve el siguiente sistema para los valores de m que lo hacen compatible.
$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & m \\ mx & + & y & = & m \\ mx & + & my & = & 1 \end{array}\right\}$

Actividad 62: (2007) Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ & & my & - & z & = & -1 \\ x & + & 2my & & & = & 0 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de m.
b) Resuelve el sistema cuando se compatible indeterminado.

Actividad 63: (2008) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \lambda y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & \lambda z & = & \lambda+1 \end{array}\right\}$

a) Clasifícalo según los valores de λ.
b) Resuélvelo para $\lambda=-1$.

Actividad 64: (2008) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & a-1 \\ 2x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro a.
b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a=-2$.

Actividad 65: (2008) Sabemos que el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$ tiene las mismas soluciones que el que resulta de añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$.

a) Determina el valor de a.
b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de sus incógnitas sea igual a la unidad.

Actividad 66: (2008) Un cajero automático contiene solo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

a) ¿Es posible que en el cajero haya triple número de billetes de 10 que de 50?
b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo?

Actividad 67: (2008) Dado el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ & & ky & + & z & = & 0 \\ x & + & (k+1)y & + & kz & = & k+1 \end{array}\right\}$

a) Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.
b) Halla el valor del parámetro k para que la solución tenga $x=2$.

Actividad 68: (2008) Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & m \\ x & + & 3y & - & z & = & m^2 \end{array}\right\}$$

Actividad 69: (2008)

a) Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & mx \\ x & + & 2y & + & z & = & my \\ x & + & 2y & + & 4z & = & mz \end{array}\right\}$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $m=0$ y para el caso $m=1$.

Actividad 70: (2008) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & m^2\\ m & m & m^2\end{pmatrix}$.

a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de *A* es menor que 3.

b) Estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Actividad 71: (2009) Considera la matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Calcula, si existe, A^{-1}.
b) Resuelve el sistema $AX=3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones.

Actividad 72: (2009) Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos *A, B* y *C*.

Pista 1: Si compramos una unidad de *A*, dos de *B* y una de *C* gastamos 118 euros.
Pista 2: Si compramos n unidades de *A*, $n+3$ de *B* y tres de *C* gastamos 390 euros.

a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles.
b) Sabiendo que $n=4$ y que el producto *C* cuesta el triple que el producto *A*, calcula el precio de cada producto.

Actividad 73: (2009)

a) Discute según los valores del parámetro λ el siguiente sistema $\left.\begin{array}{rcrcrcl}\lambda x & + & \lambda y & & & = & 0\\ x & & & + & \lambda z & = & \lambda\\ x & + & y & + & 3z & = & 1\end{array}\right\}$

b) Resuélvelo para $\lambda=-1$.

Actividad 74: (2009) Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30 % de las cajas.

Actividad 75: (2009) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{rcrcrcl}x & + & \lambda y & + & z & = & 4\\ x & + & 3y & + & z & = & 5\\ \lambda x & + & y & + & z & = & 4\end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda=1$.

Actividad 76: (2009)

a) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & 2 \end{array}\right\}$

b) Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado (a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & \lambda z & = & -3 \end{array}\right\}$

Actividad 77: (2009) Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & m+1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & - & z & = & m \end{array}\right\}$

a) Determina los valores de m para los que el sistema es compatible.
b) Resuelve el sistema para $m=-1$.

Actividad 78: (2010) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de α para los que A tiene inversa.
b) Calcula la inversa de A para $\alpha=1$.
c) Resuelve, para $\alpha=1$, el sistema $AX=B$.

Actividad 79: (2010) Considera el sistema $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -4 \end{array}\right\}$

a) Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x+y+\lambda z=9$ sea compatible indeterminado.
b) ¿Existe algún valor de λ para que el sistema resultante no tiene solución?

Actividad 80: (2010) Sea el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda+2 \\ 2x & - & \lambda y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=-1$.

Actividad 81: (2010) Considera el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} (m+2)x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & my & - & z & = & m \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores de m.
b) Resuélvelo para $m=1$.

Actividad 82: (2010)

a) Discute, según los valores del parámetro λ, el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ \lambda x & + & 2y & + & (\lambda+2)z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6-\lambda \end{array}\right\}$

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Actividad 83: (2010) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \lambda x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + \lambda y + 4z = 2 \\ 2x + \lambda y + 6z = \lambda - 2 \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda = 2$.

Actividad 84: (2011) Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.
b) Razona para qué valores de t el sistema homogéneo $AX = O$ tiene más de una solución.

Actividad 85: (2011) Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 4z & = & 4 \\ 2x & & & + & z & = & a \\ -3x & - & 3y & + & 3z & = & -3 \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo cuando sea posible.

Actividad 86: (2011) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 2 \\ \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Actividad 87: (2012) Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.
b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Actividad 88: (2012) Considera el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & k \end{array}\right.$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.
b) Resuélvelo para $k = 1$.
c) Resuélvelo para $k = -1$.

Actividad 89: (2012) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} kx + 2y = 3 \\ -x + 2kz = -1 \\ 3x - y - 7z = k+1 \end{cases}$

a) Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro k.
b) Resuélvelo para $k=1$.

Actividad 90: (2012) Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = 2 \\ x - 2y - z = k+1 \end{cases}$

a) Clasifícalo según los distintos valores de k.
b) Resuélvelo para $k=2$.

Actividad 91: (2012) Considera el siguiente sistema $\begin{cases} kx + 2y = 2 \\ 2x + ky = k \\ x - y = -1 \end{cases}$

a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
c) Halla las soluciones en cada caso.

Actividad 92: (2012) Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ -x - 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$

a) Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda = 0$ y para $\lambda = -1$.

Actividad 93: (2012) Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = \lambda+1 \\ 3y + 2z = 2\lambda+3 \\ 3x + (\lambda-1)y + z = \lambda \end{cases}$

a) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.
b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene solución única.
c) ¿Existen algunos valores de λ para el que el sistema admite la solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

Actividad 94: (2012) Considera el sistema: $\begin{cases} x + ky + 2z = k+1 \\ x + 2y + kz = 3 \\ (k+1)x + y + z = k+2 \end{cases}$

a) Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.
b) ¿Existe algún valor de k para el cual sistema no tiene solución?
c) Resuelve el sistema para $k=0$.

10.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES.

Actividad 1:

a) $x=106$, $y=64$, $z=36$ b) $x=5$, $y=4$, $z=1$

Actividad 2:

a) $x=5$, $y=0$, $z=-2$ b) $x=1+2\lambda$, $y=-3+17\lambda$, $z=7\lambda$ c) SI

d) $x=1$, $y=-2$, $z=3$ e) SI f) $x=0$, $y=3/2$, $z=-1/2$

Actividad 3:

a) $x=3$, $y=2$, $z=1$ b) $x=1$, $y=1$, $z=1$ c) $x=\dfrac{134}{31}$, $y=\dfrac{151}{31}$, $z=\dfrac{224}{31}$

Actividad 4:

a) $\begin{array}{l} Si\ \ k\neq 1\rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ k=1\rightarrow S.I. \end{array}$ b) $\begin{array}{l} Si\ \ m=2\rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ m=-31\rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ m\neq 2\ \ y\ \ m\neq -31\rightarrow S.I. \end{array}$

Actividad 5:

a) $x=0$, $y=0$, $z=0$ b) $x=-\lambda$, $y=-2\lambda$, $z=\lambda$

Actividad 6:

a) $2x+17y+9z=76$ b) $\begin{cases} x+4y=11 \\ x+4z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-9y-5z=-31 \\ -x+2y-5t=3 \end{cases}$

Actividad 7:

a) $x=-1$, $y=1$, $z=8$ b) $x=\dfrac{1}{5}-3\lambda$, $y=\dfrac{7}{5}-\lambda$, $z=5\lambda$

c) No tiene solución d) $x=\lambda$, $y=3\lambda$, $z=7\lambda$

Actividad 8:

a) $x=1+\lambda$, $y=-\lambda$, $z=\lambda$ b) $x=\lambda$, $y=3\lambda$, $z=7\lambda$ c) $x=3/2$, $y=-1/2$, $z=0$

d) $x=-\lambda$, $y=-1-\lambda$, $z=\lambda$ e) $x=1$, $y=1$, $z=-1$ f) $x=\lambda$, $y=\lambda$, $z=0$, $t=0$

Actividad 9:

a) $x=1$, $y=1$, $z=1$ b) $x=-1$, $y=-5$, $z=7$ c) $x=-1$, $y=2$, $z=-2$

Actividad 10:

a) Es compatible para $m=7$, siendo su solución $x=1$, $y=1$.
b) Es compatible para $m=-1$, siendo sus soluciones $x=1-\lambda$, $y=-1-7\lambda$, $z=3\lambda$.

Actividad 11:

a) Es compatible indeterminado, siendo sus soluciones $x = 1 + 2\lambda$, $y = 2 + \lambda$, $z = \lambda$
b) Por ejemplo: $-x + y + z = 5$.
c) Por ejemplo: $x + 2y - 7z = 3$.
d) Por ejemplo: $-x + y + z = 6$.

Actividad 12:

a) Si $k \neq -1/2 \rightarrow S.C.D$ y la solución es: $x = 2$, $y = 0$
Si $k = 1/2 \rightarrow S.C.I.$ y la solución es: $x = \lambda$, $y = -4 + 2\lambda$
b) El sistema es incompatible para cualquier valor de m.

Actividad 13:

a) $a = 2$ b) No existe c) $x = 2 - 3\lambda$, $y = -1/2$, $z = \lambda$

Actividad 14:

a) Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow S.C.D.$
Si $a = 1 \rightarrow S.I.$
Si $a = 2 \rightarrow S.C.I.$ siendo su solución: $x = 1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$

b) Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \rightarrow S.C.D.$
Si $a = -1 \rightarrow S.I.$
Si $a = 2 \rightarrow S.C.I.$ siendo su solución: $x = -1 + \lambda$, $y = 2 - \lambda$, $z = \lambda$

Actividad 15:

a) Si m $\neq 2/5$ y $m \neq -1 \rightarrow S.C.D.$ y la solución es: $x = \dfrac{-m^2 - m + 4}{5m^2 + 3m - 2}$, $y = \dfrac{-m^2 - 10m - 1}{5m^2 + 3m - 2}$
Si m $= 2/5$ o $m = -1 \rightarrow S.I.$

b) Si $a \neq 6 \rightarrow S.I.$
Si $a = 6 \rightarrow S.C.D.$ y la solución es: $x = 5$, $y = 4$, $z = 2$

c) Si b $\neq 1$ y $b \neq -2 \rightarrow S.C.D.$ siendo su solución: $x = \dfrac{-2(b+1)}{b-1}$, $y = \dfrac{b}{b-1}$, $z = \dfrac{b+2}{b-1}$
Si b $= 1 \rightarrow S.I.$
Si b $= -2 \rightarrow S.C.I.$ siendo su solución: $x = -3\lambda$, $y = \lambda$, $z = 2 + 3\lambda$

d) Si p $\neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1 \rightarrow S.C.D.$ siendo su solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
Si p $= 0 \rightarrow S.C.I.$ siendo su solución: $x = \lambda$, $y = 0$, $z = 0$
Si p $= 1 \rightarrow S.C.I.$ siendo su solución: $x = 0$, $y = \lambda$, $z = \mu$
Si p $= -1 \rightarrow S.C.I.$ siendo su solución: $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -\lambda$

Actividad 16: Los precios son 6, 3 y 2 euros respectivamente.

Actividad 17: Hay 24 personas (11 jugando, 7 charlando y 6 bailando)

Actividad 18: Las de fondo valen 7,5 €, las de general 9 € y las de tribuna 12 €.

Actividad 19: La primera solicitó 21, la segunda 15 y la tercera 6.

Actividad 20: El padre tiene 40 años, la madre 30 y el hijo 10.

Actividad 21: Sí, ya que el sistema es incompatible.

Actividad 22: 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

Actividad 23: 5 monedas de clase A, 3 de clase B y 2 de clase C.

Actividad 24: Hay 46 viajeros normales, 40 estudiantes y 4 jubilados.

Actividad 25: El litro de leche vale 1 €, el de aceite 3 € y el kg de jamón 16 €.

Actividad 26: El lote debe costar 215 €.

Actividad 27: Miden 3, 4 y 5 cm respectivamente

Actividad 28: Las cantidades son 5000 €, 5000 € y 10000 € respectivamente.

Actividad 29: El que pierde la 1ª partida tenía 39 €, el que pierde la 2ª partida tenía 21 € y el que pierde la 3ª partida pierde 12 €.

Actividad 30:

a) $\lambda \neq 3 \;\; y \;\; \lambda \neq -3$ b) $x = \lambda \;,\; y = -2\lambda \;,\; z = \lambda$

Actividad 31:

a) $m \neq 1 \;\; y \;\; m \neq 3$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $x = 0 \;,\; y = 1 \;,\; z = -1$

c) $x = 1 + \lambda \;,\; y = -1 - 3\lambda \;,\; z = \lambda$

Actividad 32:

a) $\begin{array}{l} Si \;\; m \neq 3 \;\; y \;\; m \neq -5 \rightarrow S.C.D. \\ Si \;\; m = 3 \;\rightarrow\; S.C.I. \\ Si \;\; m = -5 \;\rightarrow\; S.I. \end{array}$ b) $x = \dfrac{17}{8} - 7\lambda \;,\; y = \dfrac{11}{8} - 5\lambda \;,\; z = 8\lambda$

Actividad 33: Acudieron 100 personas a la sala A, 80 a la B y 20 a la C.

Actividad 34:

a) $a=-5$ b) $x=\frac{2}{5}-8\lambda$, $y=\frac{1}{10}-7\lambda$, $z=\lambda$

Actividad 35:

a) Hacerlo b) $x=1-\frac{\alpha^2}{2}$, $y=\frac{\alpha}{2}$, $z=\frac{\alpha}{2}$

Actividad 36: $a=4$, $b=8$

Actividad 37:

a) $Si\ \ \lambda\neq 1\ \ y\ \ m\neq -1\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda=1\rightarrow S.I.$
$Si\ \ \lambda=-1\rightarrow S.C.I.$

b) $x=\lambda$, $y=1+\lambda$, $z=0$

Actividad 38:

a) $\begin{cases} x+3y+4z=20 \\ x+3y+6z=25 \end{cases}$ b) $x=10-3\lambda$, $y=\lambda$, $z=5/2$ c) No, ya que $z=5/2$

Actividad 39:

a) Para cualquier valor.

b) Para ningún valor.

c) $m=0$, $m=2$, $m=-2$

Actividad 40:

a) $a=10$; $x=-\lambda$, $y=0$, $z=\lambda$

Actividad 41:

a) $Si\ \ m\neq 1\ \ y\ \ m\neq -1\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ m=1\rightarrow S.C.I.$
$Si\ \ m=-1\rightarrow S.I.$

b) $m=\frac{-4}{3}$

Actividad 42:

a) $Si\ \ \lambda\neq -1\ \ y\ \ \lambda\neq -2\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda=-1\rightarrow S.I.$
$Si\ \ \lambda=-2\rightarrow S.C.I.$

b) $x=1-2\lambda$, $y=-3+\lambda$, $z=\lambda$

Actividad 43:

a) $m \neq -1$ *y* $m \neq 0$; $x = -2$, $y = 2$, $z = 1$
b) $m = 0 \rightarrow x = 5 - 3\lambda$, $y = \lambda$, $z = 0$
c) $m = -1$

Actividad 44:

a) $Si\ \ b \neq 0\ \ y\ \ b \neq -3 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ b = 0 \rightarrow S.I.$
$Si\ \ b = -3 \rightarrow S.C.I.$

b) $x = -2 + \lambda$, $y = -2 + \lambda$, $z = \lambda$

Actividad 45:

a) $m \neq -7$

b) $x = \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 19\lambda$ $\quad x = 1$, $y = 7$, $z = 19$

Actividad 46: Álvaro tiene 35 €, Marta 21 € y Guillermo 28 €.

Actividad 47:

a) $m = -2$ b) $\forall m \neq 1$

Actividad 48: Es una moneda

Actividad 49: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

Actividad 50:

a) $m \neq 2$ *y* $m \neq -3$

b) $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$

Actividad 51:

a) $m = 3$

b) $x = \lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$

Actividad 52:

a) $Si\ \ \lambda \neq 0\ ,\ \lambda \neq -1\ ,\ \lambda \neq 1 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda = 0 \rightarrow S.I.$
$Si\ \ \lambda = -1 \rightarrow S.C.I.$
$Si\ \ \lambda = 1 \rightarrow S.C.I.$

b) $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{-1}{2}$, $z = \dfrac{3}{2}$

Actividad 53:

a) $Si\ \ \lambda \neq -1\ \ y\ \ \lambda \neq 1 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda = -1 \rightarrow S.C.I.$
$Si\ \ \lambda = 1 \rightarrow S.I.$

b) $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$

Actividad 54:

a) $Si\ \ \lambda \neq -1\ \ y\ \ \lambda \neq 2 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda = -1 \rightarrow\ S.I.$
$Si\ \ \lambda = 2\ \rightarrow S.C.I.$

b) $x = 4 - \lambda\ ,\ y = 2\ ,\ z = \lambda$

Actividad 55:

a) $Si\ \ \lambda \neq 1 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda = 1\ \rightarrow\ S.C.I.$

b) $x = 2 - \lambda\ ,\ y = -6 + 2\lambda\ ,\ z = \lambda$

Actividad 56:

a) $a = -1 \rightarrow x = \dfrac{-3}{2}\ ,\ y = \dfrac{5}{2} - \lambda\ ,\ z = \lambda$

b) $x = \dfrac{-4}{3}\ ,\ y = 1\ ,\ z = \dfrac{1}{3}$

Actividad 57:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $x = 3\ ,\ y = -2\ ,\ z = 0$

Actividad 58:

a) $\lambda = 2$

b) $x = 2\ ,\ y = -2 - \lambda\ ,\ z = \lambda$

Actividad 59:

$Si\ \ a \neq 2\ \ y\ \ a \neq -3 \rightarrow x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0$
$Si\ \ a = 2\ \rightarrow\ x = 0\ ,\ y = -\lambda\ ,\ z = \lambda$
$Si\ \ a = -3\ \rightarrow x = -5\lambda\ ,\ y = 2\lambda\ ,\ z = 3\lambda$

Actividad 60:

a) $\lambda = -2$

b) $x = 2\lambda\ ,\ y = -3\lambda\ ,\ z = \lambda$

Actividad 61:

$Si\ \ m = 1 \rightarrow x = 1 - \lambda\ ,\ y = \lambda$
$Si\ \ m = -1/2\ \rightarrow\ x = -1\ ,\ y = -1$

Actividad 62:

a) $Si\ \ m \neq 1 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ m = 1 \rightarrow S.C.I.$

b) $x = 2 - 2\lambda\ ,\ y = -1 + \lambda\ ,\ z = \lambda$

Actividad 63:

a) $Si\ \ \lambda \neq -1\ \ y\ \ \lambda \neq 3 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda = -1\ \rightarrow\ S.C.I.$
$Si\ \ \lambda = 3\ \rightarrow S.I.$

b) $x = 2\lambda\ ,\ y = -\lambda\ ,\ z = 3\lambda$

Actividad 64:

a) $Si\ \ a \neq 1\ \ y\ \ \ a \neq 2 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ a = 1 \ \rightarrow\ S.I.$
$Si\ \ a = 2\ \rightarrow S.C.I.$

b) $x = 1 - \lambda\ ,\ y = 0\ ,\ z = \lambda$ x

Actividad 65:

a) $a = 8$

b) $x = 6/5\ ,\ y = 1/5\ ,\ z = -2/5$

Actividad 66:

a) No

b) 80 billetes de 10 €, 10 de 20 € y 40 de 50 €.

Actividad 67:

a) $k = 1$

b) $k = 2$

Actividad 68: $m = -1\ ,\ \ m = 2$

Actividad 69:

a) $m = 1\ ,\ \ m = \dfrac{7 + \sqrt{13}}{2}\ \ y\ \ m = \dfrac{7 - \sqrt{13}}{2}$

b) $m = 0\ \rightarrow x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0$
$m = 1\ \rightarrow\ x = \lambda\ ,\ y = -2\lambda\ ,\ z = \lambda$

Actividad 70:

a) $m = 0\ ,\ m = 1$

b) $Si\ \ m = 0 \rightarrow S.I.$
$Si\ \ m = 1 \rightarrow S.C.I.\ \rightarrow\ x = 1 - \lambda - \mu\ \ ,\ \ \ y = \lambda\ \ ,\ \ z = \mu$

Actividad 71:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/9 & -2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 1/9 & -2/9 & -2/9 \end{pmatrix}$

b) $x = \lambda\ ,\ y = -2\lambda\ ,\ z = \lambda$

Actividad 72:

a) $n = 3$

b) A vale 23 €, B vale 13 € y C vale 69 €.

Actividad 73:

a) $Si\ \ \lambda \neq 0\ \ y\ \ \ \lambda \neq 6 \rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda = -0\ \rightarrow\ S.C.I.$
$Si\ \ \lambda = 6\ \rightarrow S.I.$

b) $x = 0\ ,\ y = 1 - 3\lambda\ ,\ z = \lambda$

Actividad 74: Ha pagado 12000 €.

Actividad 75:

a) $\begin{cases} Si\ \ \lambda \neq 1\ \ y\ \ \lambda \neq 3 \rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ \lambda = 1 \rightarrow S.C.I. \\ Si\ \ \lambda = 3 \rightarrow S.I. \end{cases}$

b) $x = 7/2 - \lambda$, $y = 1/2$, $z = \lambda$

Actividad 76:

a) $x = 2 - \lambda$, $y = 2 - 3\lambda$, $z = \lambda$

b) $\lambda = 3$

Actividad 77:

a) $m = 0$, $m = -1$

b) $x = 1/2 - \lambda$, $y = -1/2 + \lambda$, $z = 2\lambda$

Actividad 78:

a) $\alpha \neq 2\ \ y\ \ \alpha \neq 3/2$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Actividad 79:

a) $\lambda = 0$

b) No existe.

Actividad 80:

a) $\begin{cases} Si\ \ \lambda \neq -1 \rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ \lambda = -1 \rightarrow S.C.I. \end{cases}$

b) $x = 1/3$, $y = 4/3 - \lambda$, $z = \lambda$

Actividad 81:

a) $\begin{cases} Si\ \ \lambda \neq 1\ \ y\ \ \lambda \neq -1 \rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ \lambda = 1 \rightarrow S.C.I. \\ Si\ \ \lambda = -1 \rightarrow S.I. \end{cases}$

b) $x = 1/2 + \lambda$, $y = 1/2 + \lambda$, $z = 2\lambda$

Actividad 82:

a) $\begin{cases} Si\ \ \lambda \neq 0\ \ y\ \ \lambda \neq 8 \rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ \lambda = 0 \rightarrow S.C.I. \\ Si\ \ \lambda = 8 \rightarrow S.I. \end{cases}$

b) $x = \lambda$, $y = 2 - \lambda$, $z = \lambda$

Actividad 83:

a) $\begin{cases} Si\ \ \lambda \neq 2\ \ y\ \ \lambda \neq -2 \rightarrow S.C.D. \\ Si\ \ \lambda = 2 \rightarrow S.C.I. \\ Si\ \ \lambda = -2 \rightarrow S.I. \end{cases}$

b) $x = 3 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = -1$

Actividad 84:

a) $Si\ \ t\neq 1\ \ y\ \ \ t\neq 2\rightarrow \text{rg}A=3$
$Si\ \ t=1\ \rightarrow\ \text{rg}A=2$
$Si\ \ t=2\ \rightarrow \text{rg}A=2$

b) $t=1\ y\ \ t=2$

Actividad 85:

a) $Si\ \ a\neq 3\rightarrow S.I.$
$Si\ \ a=3\ \rightarrow\ S.C.I.$

b) $x=3/2-\lambda\ \ ,\ \ y=-1/2+3\lambda\ ,\ z=2\lambda$

Actividad 86:

a) $Si\ \ \lambda\neq 0\ \ y\ \ \ \lambda\neq 1\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda=0\ \rightarrow\ S.C.I.$
$Si\ \ \lambda=1\ \rightarrow S.I.$

b) $x=2-\lambda\ ,\ y=1-\lambda\ ,\ z=\lambda$

Actividad 87:

a) No

b) El libro vale 38 €, la calculadora 15 € y el estuche 4 €.

Actividad 88:

a) $Si\ \ k\neq 1\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ k=1\rightarrow\ S.C.I.$

b) $x=\lambda\ ,\ y=1-\lambda\ ,\ z=\lambda$

c) $x=1/2\ ,\ y=0\ ,\ z=-1/2$

Actividad 89:

a) $Si\ \ k\neq -7\ \ \ y\ \ \ k\neq 1\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ k=-7\ \rightarrow\ S.I.$
$Si\ \ k=1\ \rightarrow S.C.I.$

b) $x=1+2\lambda\ ,\ y=1-\lambda\ ,\ z=\lambda$

Actividad 90:

a) $Si\ \ k\neq 0\ \ y\ \ \ k\neq 2\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ k=0\ \rightarrow\ S.I.$
$Si\ \ k=2\ \rightarrow S.C.I.$

b) $x=7/5-\lambda\ ,\ y=-4/5-3\lambda\ ,\ z=5\lambda$

Actividad 91:

a) Hacer

b) $Si\ \ k\neq -2\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ k=-2\rightarrow\ S.C.I.$

c) $k\neq -2\ \rightarrow\ x=0\ ,\ y=1$
$k=-2\ \rightarrow\ x=-1+\lambda\ ,\ y=\lambda$

Actividad 92:

a) $Si\ \ \lambda\neq 0\ \ y\ \ \ \lambda\neq -1\rightarrow S.C.D.$
$Si\ \ \lambda=0\ \rightarrow\ S.C.I.$
$Si\ \ \lambda=-1\ \rightarrow S.C.I.$

b) $\lambda=0\ \rightarrow\ x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=\lambda$
$\lambda=-1\ \rightarrow\ x=-1+\lambda\ ,\ y=\lambda\ ,\ z=1-2\lambda$

Actividad 93:

a) $x = 1/3 - \lambda$, $y = 5/3 - 2\lambda$, $z = 3\lambda$ b) $\lambda \neq 1$ c) $\lambda = -1$

Actividad 94:

a) $k = -3$, $k = 0$, $k = 2$ b) No c) $x = 2\lambda$, $y = 3/2 - \lambda$, $z = 1/2 - \lambda$