CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ MEDIANTE DETERMINANTES

Dada una matriz, A, se define:

$Rg(A)$ = número de líneas (filas o columnas) linealmente independientes

---

EJERCICIOS RESUELTOS

Calcula, utilizando determinantes, el rango de las siguientes matrices:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Como $\dim(A) = 2 \times 4 \rightarrow$ Valores posibles de $Rg(A) = \{1, 2\}$

- Escogemos una submatriz cuadrada de A de dimensión 2×2 y calculamos el valor de su determinante.

Por ejemplo: $X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $|X_1| = -3 \neq 0$

Como existe un menor de orden 2 de la matriz $A \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = 2$

Nota: Si hubiésemos elegido el menor $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $|X_2| = 0$, por lo que tendríamos que seguir comprobando con otros menores de A.

2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\dim(B) = 3 \times 3 \rightarrow$ Valores posibles de $Rg(B) = \{1, 2, 3\}$

- Calculamos $|B| = -4 \neq 0 \Rightarrow Rg(B) = 3$

3) $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\dim(C) = 3 \times 3 \rightarrow$ Valores posibles de $Rg(C) = \{1, 2, 3\}$

- Calculamos $|C| = 0 \rightarrow Rg(C)$ no puede ser 3 $\rightarrow$ Valores posibles de $Rg(C) = \{1, 2\}$

- Escogemos una submatriz cuadrada de C de dimensión 2×2 y calculamos el valor de su determinante.

Por ejemplo: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|X_1| = 2 \neq 0$

Como existe un menor de orden 2 de la matriz $C \neq 0 \Rightarrow Rg(C) = 2$

4) Calcula el rango de la matriz D según los valores del parámetro k :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\dim(D) = 3 \times 3 \rightarrow$ Valores posibles de $\text{Rg}(D) = \{1, 2, 3\}$

- Calculamos $|D| = -k$

- Discusión:

- $k = 0 \Rightarrow \text{Rg}(D) = 2$
- $k \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(D) = 3$

5) Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:

$$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \implies a = -4 \quad a = 2$$

$$|A_2| = -8(a+4) = 0 \implies a = -4$$

$$|A_3| = 12a + 48 = 0 \implies a = -4$$

$$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \implies a = -4 \quad a = -\frac{2}{3} \text{ El único valor de } a \text{ que anu-}$$

la todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:

Si $a = -4$ el rango de A es 2
Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

6) Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 2 \\ 2 & k & k^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro K

Solución:

Como $\dim(A) = 3 \times 4 \rightarrow$ Valores posibles de $\text{Rg}(B) = \{1, 2, 3\}$

Calculamos $\det(C_1 C_2 C_3) = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & k & k^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^3 + 3k^2 - 2k$, cuyas raíces son $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 2$.

• Si $k = 0$, obtenemos $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$

• Si $k = 1$, obtenemos $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$

• Si $k = 2$, obtenemos $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y como $F_1 = F_3$, se deduce que $\text{rg}(M) = 2$

En resumen: Si $k = 2, \text{rg}(M) = 2$, y si $k \neq 2, \text{rg}(M) = 3$