

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$

Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a .

Solución:

Estudiar el rango de la matriz

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix} & |A| &= \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = \\
 & & & \xrightarrow{\quad} & = -a \cdot \begin{vmatrix} a-1 & a \\ a & a+2 \end{vmatrix} = -a \cdot [(a-1) \cdot (a+2) - a^2] = \\
 & & & & = -a \cdot (\cancel{a^2} + a - 2 - \cancel{a^2}) = -a \cdot (a - 2) = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si $a=0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 0 \rightarrow \text{rg } A < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rg } A = 2}$

Si $a=2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$|A| = 0 \rightarrow \text{rg } A < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rg } A = 2}$

Si $a \neq 0 \wedge a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rg } A = 3}$