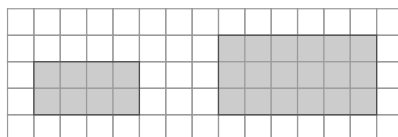


10 Semejanza

1. Actividad resuelta.

2. Dibuja dos rectángulos de modo que su base sea exactamente el doble que su altura. ¿Son semejantes las figuras que has dibujado? ¿Cuál es la razón de semejanza?

Por ejemplo, dibujamos:



Sí, ambas figuras son semejantes porque sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

Su razón de semejanza es: $k = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = 0,5$

3. Se ha ampliado una fotografía que medía 10 cm × 15 cm a 16 cm × 24 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza aplicada en la ampliación?

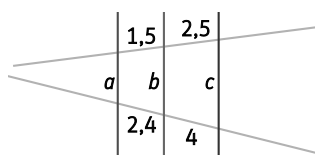
Su razón de semejanza es: $k = \frac{16}{10} = \frac{24}{15} = 1,6$

4. Las medidas de un rectángulo son 5 y 10 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior si su lado mayor mide 5 cm.

Calculamos la razón de semejanza: $k = \frac{10}{5} = 2$

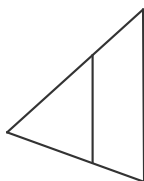
El otro lado del segundo rectángulo mide: $\frac{5}{2} = 2,5$ cm

5. Las rectas a y b del dibujo son paralelas. Comprueba utilizando el teorema de Tales si también lo es la recta c.



$\frac{1,5}{2,4} = \frac{2,5}{4} = 0,625 \Rightarrow c$ también es paralela a a y b .

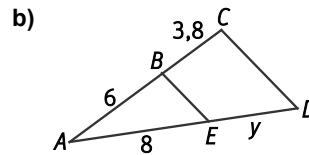
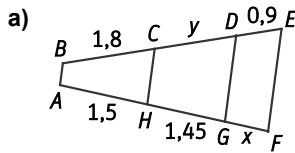
6. Indica qué medidas se corresponden con la figura.



- A. 2; 1,2; 1,6; 0,8
- B. 1,5; 0,9; 1,2; 0,72
- C. 2; 4; 3; 9
- D. 1,5; 1; 1,25; 2

$\frac{1,5}{1,2} = \frac{0,9}{0,72} = 1,25 \Rightarrow$ La respuesta correcta es B. 1,5; 0,9; 1,2; 0,72.

7. Calcula la longitud de los segmentos desconocidos.

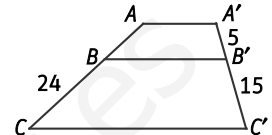


a) $\frac{1,8}{1,5} = \frac{y}{1,45} = \frac{0,9}{x} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 0,9}{1,8} = 0,75$ e $y = \frac{1,45 \cdot 1,8}{1,5} = 1,74$

b) $\frac{6}{8} = \frac{3,8}{y} \Rightarrow y = 5,07$

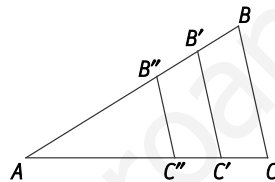
8. Calcula la longitud del segmento AC de la figura.

Compara tu respuesta con un compañero, ¿habéis seguido los mismos pasos?



$$\frac{24}{15} = \frac{AC}{5+15} \Rightarrow AC = \frac{24 \cdot 20}{15} = 32$$

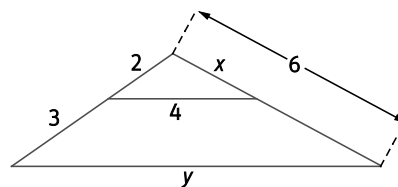
9. Explica por qué los triángulos que aparecen en la siguiente figura son triángulos en posición de Tales.



Los triángulos ABC, AB'C' y AB''C'' están en posición de Tales porque tienen un vértice común, A, y los lados BC, B'C' y B''C'' opuestos son paralelos.

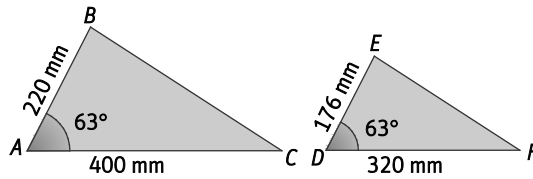
10. Actividad resuelta.

11. Calcula la longitud de los lados desconocidos x e y del siguiente triángulo.



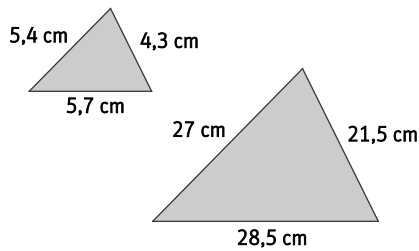
$$\frac{6}{x} = \frac{2+3}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 6}{5} = 2,4 \quad y = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

12. Comprueba, aplicando los criterios de semejanza, si los siguientes triángulos son semejantes.



Aplicamos el 2.º criterio de semejanza: $\hat{A} = \hat{D} = 63^\circ$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{220}{176} = \frac{400}{320} = 1,25$
 Por tanto, los dos triángulos son semejantes.

13. Comprueba si estos triángulos son semejantes.



Aplicamos el 3.º criterio de semejanza: $\frac{5,4}{27} = \frac{4,3}{21,5} = \frac{5,7}{28,5} = 0,2$
 Por tanto, los dos triángulos son semejantes.

14. Actividad resuelta.

15. Isabel está aburrida esperando a una amiga al lado de una farola y observa que su sombra mide 40 cm, y la de la farola, 60 cm. Si ella mide 1,6 m, ¿cuál es la altura de la farola?

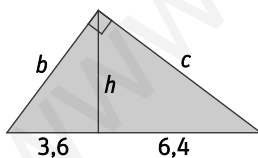
Los triángulos que forman Isabel y su sombra y la farola y su correspondiente sombra son semejantes. Por tanto:

$$\frac{1,6}{0,4} = \frac{h}{0,6} \Rightarrow h = \frac{1,6 \cdot 0,6}{0,4} = 2,4 \text{ m}$$

16. Actividad interactiva.

17. Aplica primero el teorema del cateto y luego el de la altura para calcular las medidas desconocidas en cada caso.

a)



a) Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = 3,6 \cdot (3,6 + 6,4) = 36 \Rightarrow b = \sqrt{36} = 6$

$$c^2 = 6,4 \cdot (3,6 + 6,4) = 64 \Rightarrow c = \sqrt{64} = 8$$

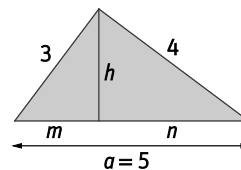
Por el teorema de la altura: $h^2 = 3,6 \cdot 6,4 = 23,04 \Rightarrow h = \sqrt{23,04} = 4,8$

b) Si aplicamos el teorema del cateto: $3^2 = m \cdot 5 \Rightarrow m = \frac{9}{5} = 1,8$

$$4^2 = n \cdot 5 \Rightarrow n = \frac{16}{5} = 3,2$$

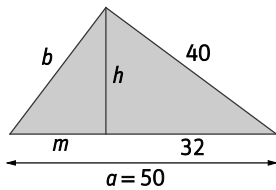
Mediante el teorema de la altura: $h^2 = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76 \Rightarrow h = \sqrt{5,76} = 2,4$

b)

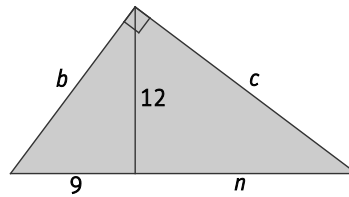


18. Aplica los teoremas de la altura y del cateto y halla las medidas desconocidas en ambos casos.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = (50 - 32) \cdot 50 = 900 \Rightarrow b = \sqrt{900} = 30$

Por el teorema de la altura: $h^2 = 3,6 \cdot 6,4 = 23,04 \Rightarrow h = \sqrt{23,04} = 4,8$

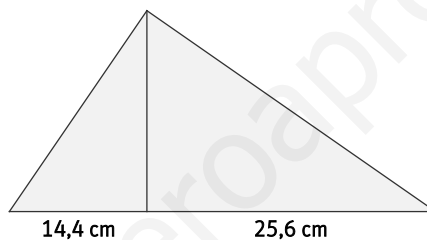
b) Mediante el teorema de la altura: $12^2 = 9 \cdot n \Rightarrow n = \frac{144}{9} = 16$

Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = 9 \cdot (9 + 16) = 225 \Rightarrow b = \sqrt{225} = 15$

$c^2 = 16 \cdot (9 + 16) = 400 \Rightarrow c = \sqrt{400} = 20$

19. En un triángulo rectángulo la hipotenusa queda dividida en dos segmentos de 14,4 cm y 25,6 cm al trazar la altura sobre la hipotenusa.

a) Dibuja en tu cuaderno el triángulo con sus medidas correspondientes.



a) Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y el valor de los catetos.

Aplicamos el teorema de la altura: $h^2 = 14,4 \cdot 25,6 = 368,64 \Rightarrow h = \sqrt{368,64} = 19,2$

Por el teorema del cateto: $b^2 = 14,4 \cdot (14,4 + 25,6) = 576 \Rightarrow b = \sqrt{576} = 24$

$c^2 = 25,6 \cdot (14,4 + 25,6) = 1024 \Rightarrow c = \sqrt{1024} = 32$

20. Actividad resuelta.

21. En un triángulo rectángulo los catetos miden 24 cm y 7 cm, respectivamente.

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa?

b) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

c) Calcula el área del triángulo.

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras: $a^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow a = \sqrt{625} = 25$ cm

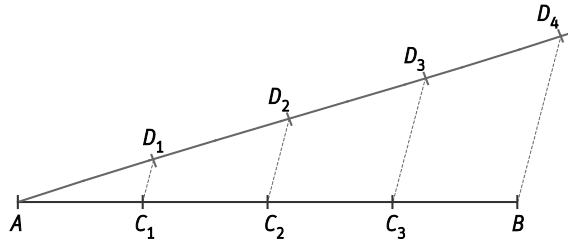
b) Por el teorema del cateto: $7^2 = m \cdot 25 \Rightarrow m = \frac{49}{25} = 1,96$ cm

$24^2 = n \cdot 25 \Rightarrow n = \frac{576}{25} = 23,04$ cm

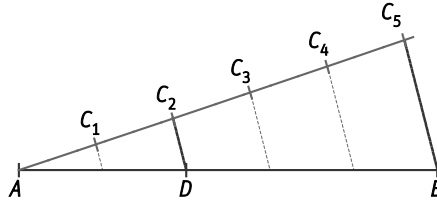
Mediante el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 1,96 \cdot 23,04 = 45,1584 \Rightarrow h = \sqrt{45,1584} = 6,72$ cm

c) El área mide: $A = \frac{25 \cdot 6,72}{2} = 84$ cm²

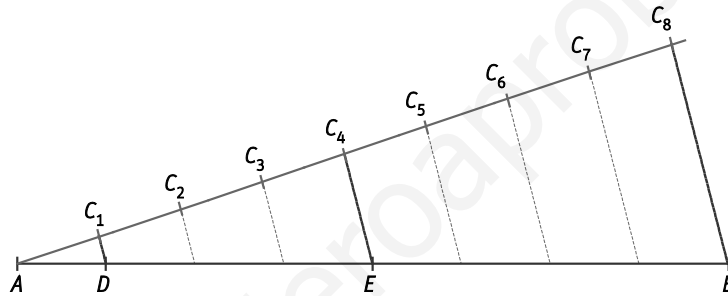
22. Divide un segmento de 7 cm de longitud en cuatro partes iguales.



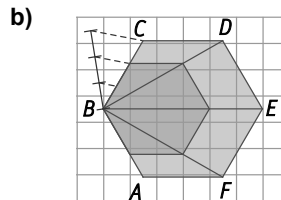
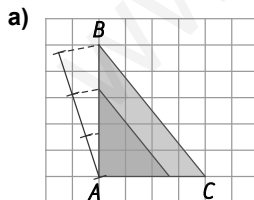
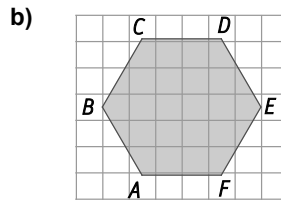
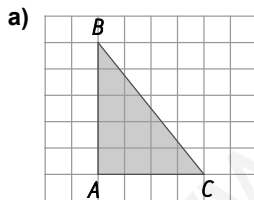
23. Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes proporcionales a 2 y 3.



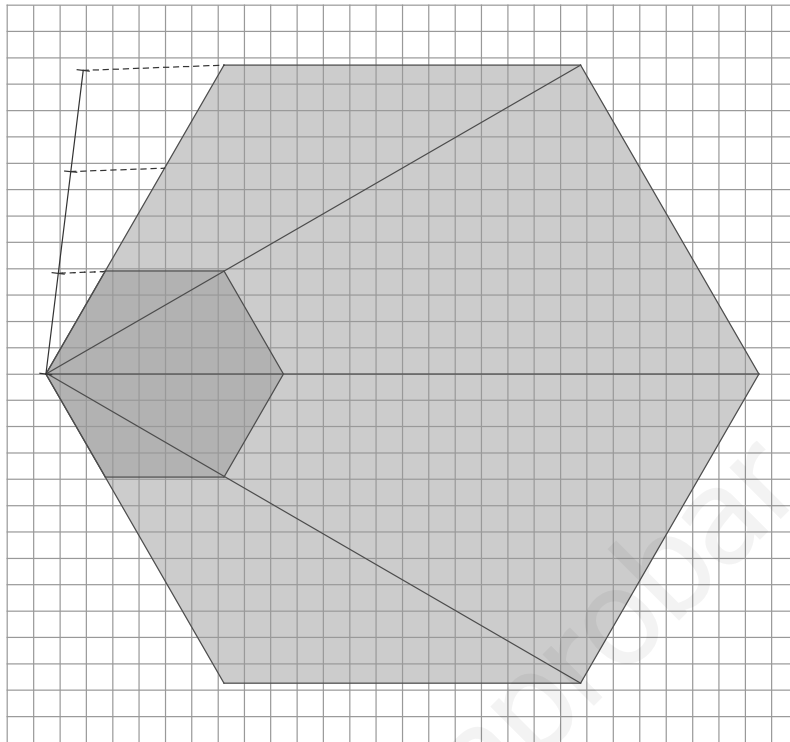
24. Divide un segmento de 10 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 3 y 4.



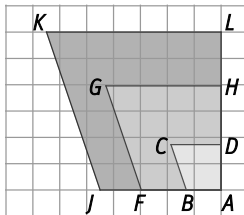
25. Construye polígonos semejantes a los siguientes con razón de semejanza $\frac{2}{3}$ en tu cuaderno.



26. Dibuja en tu cuaderno un hexágono regular de 5 cm de lado y construye otro semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.



27. Indica la razón de semejanza de las siguientes parejas de figuras.



- a) Los cuadriláteros $ABCD$ y $AFGH$.
- b) Los cuadriláteros $ABCD$ y $AJKL$.
- c) Los cuadriláteros $AFGH$ y $AJKL$.

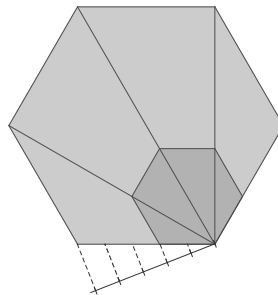
a) $k = \frac{AD}{AH} = \frac{\frac{7}{4}}{4} = \frac{7}{16}$

b) $k = \frac{AD}{AL} = \frac{\frac{7}{4}}{6} = \frac{7}{24}$

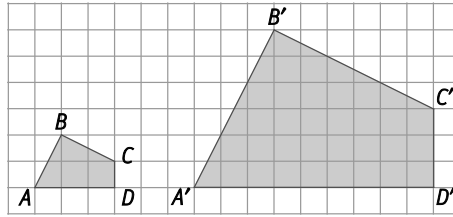
c) $k = \frac{AH}{AL} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

28. En un concierto quieren reservar $\frac{2}{5}$ de la pista a las personas de movilidad reducida. La pista tiene forma de hexágono regular y la zona reservada debe quedar lo más cerca posible del escenario, que está en uno de los lados del hexágono.

Dibuja en tu cuaderno un esquema de la pista del concierto y de la zona reservada.



29. Comprueba si las siguientes figuras son semejantes.



- a) Calcula la medida de los lados, el perímetro y el área de cada figura.
 b) Comprueba la relación que existe entre la razón de semejanza y las razones de los perímetros y de las áreas.
 a) Para calcular los lados inclinados en la cuadrícula, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}; \quad BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}; \quad CD = 1; \quad DA = 3$$

$$A'B' = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}; \quad B'C' = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{45}; \quad C'D' = 3; \quad DA = 9$$

Los perímetros son:

$$P_{ABCD} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + 1 + 3 = 2\sqrt{5} + 4 \quad P_{A'B'C'D'} = \sqrt{45} + \sqrt{45} + 3 + 9 = 2\sqrt{45} + 12$$

Para calcular el área, descomponemos la figura y formamos un cuadrado de lado 2, en el primer caso, y de lado 6, en el segundo:

$$A_{ABCD} = 4$$

$$A_{A'B'C'D'} = 36$$

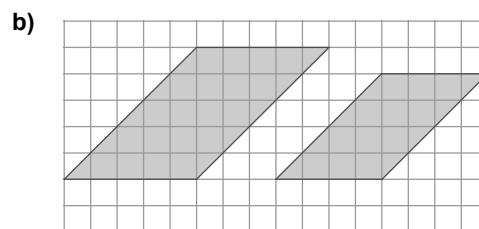
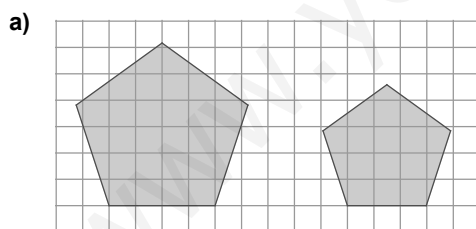
b)
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{A'B'C'D'}} = \frac{2\sqrt{5} + 4}{2\sqrt{45} + 12} = \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{45} + 6} = \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{3^2 \cdot 5} + 6} = \frac{\sqrt{5} + 2}{3 \cdot \sqrt{5} + 6} = \frac{\sqrt{5} + 2}{3(\sqrt{5} + 2)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{A'B'C'D'}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$

La razón de los perímetros coincide con la razón de semejanza y la de las áreas coincide con el cuadrado.

30. Halla la razón de semejanza entre estas figuras. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?



a) La razón de semejanza entre las figuras es $k = \frac{3}{1} = 3$, entre los perímetros es $k = \frac{3}{1} = 3$ y entre las áreas es $k^2 = \frac{9}{1} = 9$.

b) La razón de semejanza entre las figuras es $k = \frac{4}{2} = 2$, entre los perímetros es $k = \frac{4}{2} = 2$ y entre las áreas es $k^2 = \frac{16}{4} = 4$.

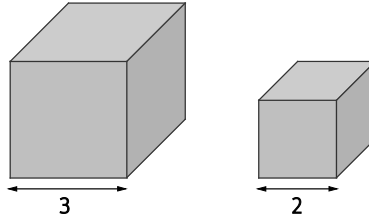
31. El perímetro de un hexágono regular mide 36 cm. ¿Cuál será el perímetro de otro hexágono regular si la razón de semejanza entre ambos es 5?

$$\frac{36}{P'} = 5 \Rightarrow P' = \frac{36}{5} = 7,2 \text{ cm}$$

32. El área de un cuadrado es de 16 cm^2 . ¿Cuál será el área de otro cuadrado si la razón de semejanza entre ambos cuadrados es 2?

$$\frac{16}{A'} = 2^2 = 4 \Rightarrow A' = 4 \text{ cm}^2$$

33. Calcula la razón de semejanza entre estos cubos.



¿Cuál será la razón entre volúmenes?

La razón de semejanza entre las figuras es $k = \frac{3}{2}$ y entre los volúmenes es $k^3 = \frac{27}{8}$.

34. El volumen de una pirámide es de 125 cm^3 . ¿Cuál será el volumen de otra pirámide semejante a esta si la razón de semejanza es 2,5?

$$\frac{125}{V'} = 2,5^3 = 15,625 \Rightarrow V' = 8 \text{ cm}^3$$

35. Actividad resuelta.

36. Los lados de un cuadrilátero miden 4, 7, 9 y 12 cm y su área es de 100 cm^2 .

a) Halla la medida de los lados de un cuadrilátero semejante al anterior cuyo perímetro sea 48 cm.

b) ¿Cuál será la razón de las áreas entre los cuadriláteros?

a) Calculamos la razón de semejanza:

$$k = \frac{P}{P'} = \frac{48}{4+7+9+12} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Los lados miden: $4 \cdot 1,5 = 6 \text{ cm}$; $7 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ cm}$; $9 \cdot 1,5 = 13,5 \text{ cm}$ y $12 \cdot 1,5 = 18 \text{ cm}$

b) La razón entre las áreas es $k^2 = 1,5^2 = 2,25$.

37. Jorge y Elena han preparado un cartel de $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ para anunciar la fiesta de final de curso. Como piensan que les ha quedado un poco pequeño, hacen una fotocopia ampliada un 25 %.

a) Halla las nuevas dimensiones del cartel.

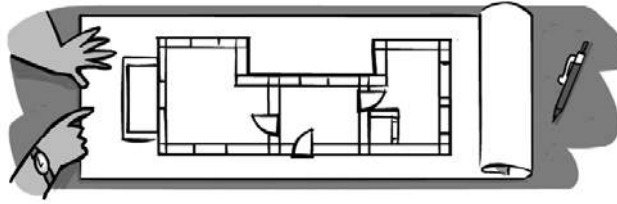
b) Comprueba que la relación de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

a) La razón de semejanza es $k = 1,25$.

Las nuevas dimensiones son: $40 \cdot 1,25 = 50 \text{ cm}$ y $25 \cdot 1,25 = 31,25 \text{ cm}$

b)
$$\frac{A_{\text{ampliado}}}{A_{\text{original}}} = \frac{50 \cdot 31,25}{40 \cdot 25} = \frac{1562,5}{1000} = 1,5625 = 1,25^2 = k^2$$

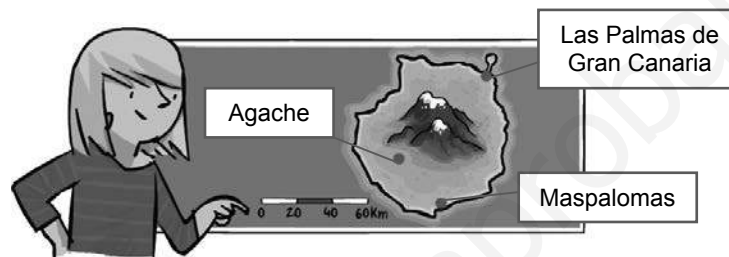
43. Fíjate en este plano de un comercio, mide con ayuda de una regla y calcula las dimensiones de cada estancia si la escala es 1:300.



De izquierda a derecha:

- En el plano: $1,2 \times 1,1 \text{ cm} \Rightarrow$ En la realidad: $1,2 \cdot 300 \times 1,1 \cdot 300 \text{ cm} = 360 \times 330 \text{ cm} = 3,6 \times 3,3 \text{ m}$
- En el plano: $0,9 \times 0,9 \text{ cm} \Rightarrow$ En la realidad: $0,9 \cdot 300 \times 0,9 \cdot 300 \text{ cm} = 270 \times 270 \text{ cm} = 2,7 \times 2,7 \text{ m}$
- En el plano: $1,2 \times 0,8 \text{ cm} \Rightarrow$ En la realidad: $1,2 \cdot 300 \times 0,8 \cdot 300 \text{ cm} = 360 \times 240 \text{ cm} = 3,6 \times 2,4 \text{ m}$

44. El siguiente mapa representa la isla de Gran Canaria.



Halla la distancia en línea recta entre la capital, Las palmas de Gran Canaria y los municipios de Maspalomas y Agache.

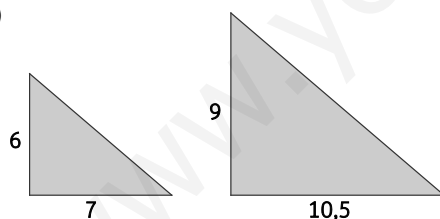
Según la escala, 0,4 cm en el mapa equivalen a 20 km en la realidad. Por tanto, la escala es 1:5 000.

Las Palmas de Gran Canaria – Agache: 1,35 cm en el mapa $\Rightarrow 1,35 \cdot 5000000 = 6750000 \text{ cm} = 67,5 \text{ km}$ en la realidad.

Las Palmas de Gran Canaria – Maspalomas: 1,5 cm en el mapa $\Rightarrow 1,5 \cdot 5000000 = 7500000 \text{ cm} = 75 \text{ km}$ en la realidad.

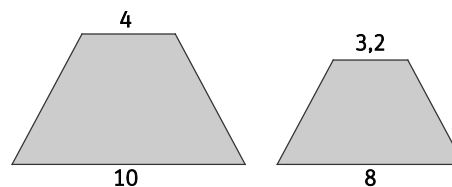
45. Comprueba si las siguientes figuras son semejantes entre sí. Justifica tu respuesta en cada caso.

a)



a) $\frac{9}{6} = \frac{10,5}{7} = 1,5$. Sí es semejante, ya que sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

b)



b) $\frac{4}{3,2} = \frac{10}{8} = 1,25$. Sí es semejante, ya que sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

46. ¿Son semejantes todos los hexágonos regulares? Un hexágono regular tiene por lado 4 cm. Calcula el lado de otro hexágono regular con razón de semejanza respecto al anterior de 3,5.

Sí, todos los hexágonos regulares son semejantes, ya que sus ángulos son iguales, y sus lados, proporcionales.

$$\frac{l}{4} = 3,5 \Rightarrow l = 4 \cdot 3,5 = 14 \text{ cm}$$

47. Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos. Estudia, en cada caso, si son o no semejantes. En caso afirmativo, determina la razón de semejanza.

- a) $a = 2; b = 4$ y $c = 5$ $a' = 8; b' = 16$ y $c' = 20$
 b) $a = 3; b = 4$ y $c = 6$ $a' = 4,5; b' = 6$ y $c' = 8,5$
 c) $a = 2,5; b = 5,5$ y $c = 7$ $a' = 7,5; b' = 16,5$ y $c' = 21$

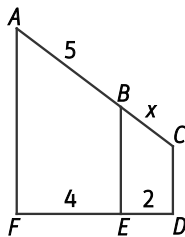
a) $\frac{a}{a'} = \frac{2}{8} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{16} = \frac{c}{c'} = \frac{5}{20} \Rightarrow k = \frac{1}{4} = 0,25$

b) $\frac{a}{a'} = \frac{3}{4,5} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{6} \neq \frac{c}{c'} = \frac{6}{8,5} \Rightarrow$ No son proporcionales.

c) $\frac{a}{a'} = \frac{2,5}{7,5} = \frac{b}{b'} = \frac{5,5}{16,5} = \frac{c}{c'} = \frac{7}{21} \Rightarrow k = \frac{1}{3} = 0,3$

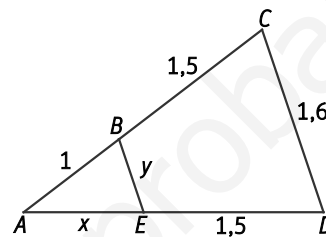
48. Calcula el valor de los segmentos desconocidos en cada una de las siguientes representaciones.

a)



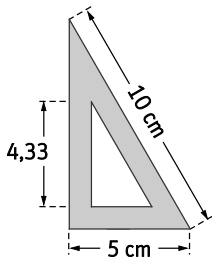
a) $\frac{5}{4} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 2}{4} = 2,5$

b)



b) $\frac{1}{x} = \frac{1,5}{1,5} \Rightarrow x = 1$ $\frac{1+1,5}{1,6} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1,6}{2,5} = 0,64$

49. Comprueba que los dos triángulos que forman el cartabón de la figura son proporcionales. Calcula la medida de todos los lados e indica la razón de semejanza.



Mediante el teorema de Pitágoras calculamos el cateto que falta del triángulo mayor:

$$c = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

La razón de semejanza es: $k = \frac{8,66}{4,33} = 2$

Los lados que faltan del triángulo menor miden:

$$\frac{10}{h} = 2 \Rightarrow h = 5 \text{ cm (hipotenusa)}$$

$$\frac{5}{c} = 2 \Rightarrow c = 2,5 \text{ cm (cateto)}$$

50. Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos semejantes. Calcula, en cada caso, la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) $a = 3, b = 4, c = 6$ $a' = 4,5, b' = x, c' = y$

b) $a = x, b = 4, c = 3$ $a' = 2, b' = 2, c' = y$

c) $a = x, b = y, c = 8$ $a' = 12, b' = 20, c' = 25$

a) $\frac{a}{a'} = \frac{3}{4,5} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{x} = \frac{c}{c'} = \frac{6}{y}$

$\frac{3}{4,5} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 4,5}{3} = 6$

$\frac{3}{4,5} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = \frac{6 \cdot 4,5}{3} = 9$

b) $\frac{a}{a'} = \frac{x}{2} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{2} = \frac{c}{c'} = \frac{3}{y}$

$\frac{x}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

$\frac{4}{2} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1,5$

c) $\frac{a}{a'} = \frac{x}{12} = \frac{b}{b'} = \frac{y}{20} = \frac{c}{c'} = \frac{8}{25}$

$\frac{x}{12} = \frac{8}{25} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 12}{25} = 3,84$

$\frac{y}{20} = \frac{8}{25} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 20}{25} = 6,4$

51. Del polígono $ABCDE$ de la siguiente figura se conocen las medidas:

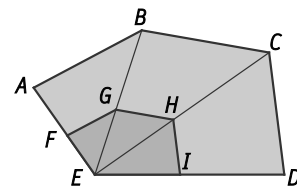
$$AB = 27 \text{ mm}$$

$$CD = 30 \text{ mm}$$

$$EA = 25 \text{ mm}$$

$$BC = 30 \text{ mm}$$

$$DE = 45 \text{ mm}$$



Si el polígono $EFGHI$ es semejante al anterior e $IE = 2 \text{ cm}$:

a) Calcula la razón de semejanza de los dos polígonos.

b) Halla los lados desconocidos de $EFGHI$.

a) $k = \frac{DE}{IE} = \frac{4,5}{2} = 2,25$

b) $FG = \frac{2,7}{2,25} = 1,2 \text{ cm}$ $HI = \frac{3}{2,25} = 1,3 \text{ cm}$ $EF = \frac{2,5}{2,25} = 1,1 \text{ cm}$ $GH = \frac{3}{2,25} = 1,3 \text{ cm}$

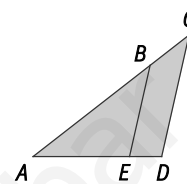
52. En la figura, los lados CD y BE son paralelos. Se sabe que:

$$AB = 3$$

$$AE = 2$$

$$BC = 1$$

$$BE = 2$$



a) ¿Cómo son los triángulos ABE y ACD ?

b) Calcula las medidas de los segmentos AD , ED y CD .

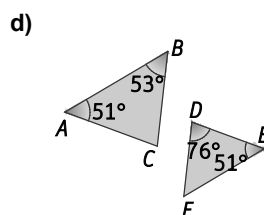
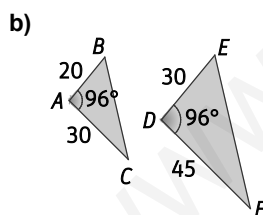
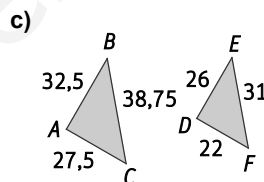
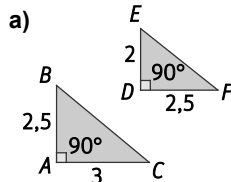
c) ¿Cuál es la razón de semejanza?

a) Como los lados CD y BE son paralelos, los triángulos tienen dos ángulos iguales, por tanto, por el 1.º criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

b) $\frac{3}{2} = \frac{3+1}{AD} \Rightarrow AD = \frac{4 \cdot 2}{3} = 2,6$ $\frac{3}{2} = \frac{1}{ED} \Rightarrow ED = \frac{2}{3} = 0,6$ $\frac{3}{2} = \frac{4}{CD} \Rightarrow CD = 2,6$

c) $k = \frac{3}{4} = 0,75$

53. Estudia si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes.



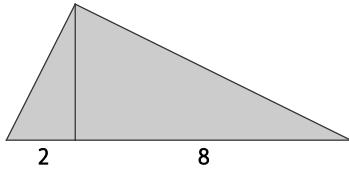
a) $\frac{2,5}{2} = 1,25 \neq \frac{3}{2,5} = 1,2$. Aunque tienen un ángulo correspondiente igual, los lados que lo forman no son proporcionales, por tanto, por el 2.º criterio de semejanza, no son triángulos semejantes.

b) $\frac{20}{30} = \frac{30}{45} = 0,6$. Tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que lo forman son proporcionales, por tanto, por el 2.º criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

c) $\frac{32,5}{26} = \frac{38,75}{31} = \frac{27,5}{22} = 1,25$. Como todos los lados son proporcionales, por el 3.º criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

d) Calculamos el ángulo que falta en el triángulo ABC : $180 - (51 + 53) = 76^\circ$. Como tienen tres ángulos iguales, son triángulos semejantes.

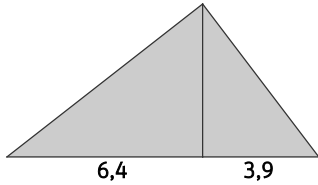
54. Calcula la altura y el área del siguiente triángulo rectángulo.



Por el teorema de la altura: $h^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow h = 4$

El área es: $A = \frac{(2+8) \cdot 4}{2} = 20$

55. Halla la longitud de los lados del triángulo rectángulo siguiente.



Por el teorema del cateto:

$b^2 = 6,4 \cdot (6,4 + 3,9) = 65,92 \Rightarrow b = 8,12$

$c^2 = 3,9 \cdot (6,4 + 3,9) = 40,17 \Rightarrow c = 6,34$

56. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm y uno de sus catetos mide 12 cm.

a) Halla la medida del otro cateto.

b) Si trazamos la altura sobre la hipotenusa, ¿cuánto miden las dos partes en que queda dividida? ¿Cuánto mide esta altura?

c) Calcula el área del triángulo rectángulo de dos formas diferentes. ¿Obtienes el mismo resultado?

a) Por el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$ cm

b) Por el teorema del cateto, cada una de las partes de la hipotenusa mide:

$16^2 = m \cdot 20 \Rightarrow m = 12,8$ cm

$12^2 = n \cdot 20 \Rightarrow n = 7,2$ cm

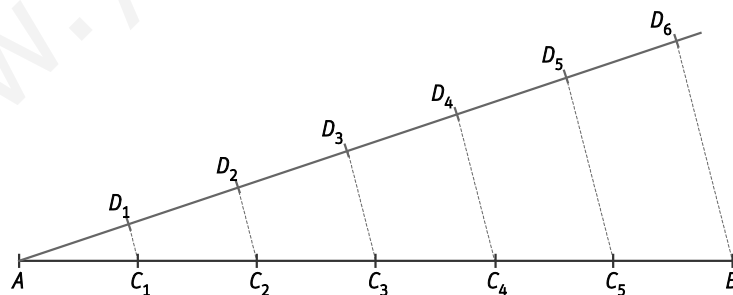
Por el teorema de la altura: $h^2 = 12,8 \cdot 7,2 = 92,16 \Rightarrow h = 9,6$ cm

c) Si tomamos la hipotenusa como base: $A = \frac{20 \cdot 9,6}{2} = 96$ cm²

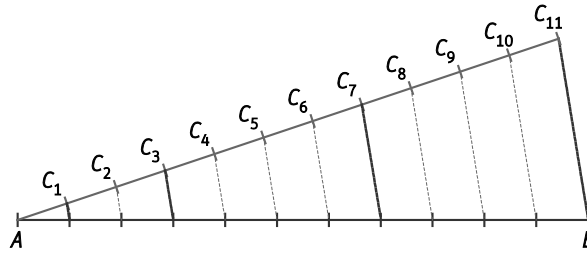
Si tomamos el cateto mayor como base: $A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96$ cm²

Sí, se obtiene el mismo resultado.

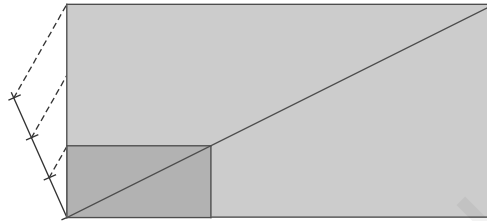
57. Divide un segmento de 10 cm de longitud en seis partes iguales.



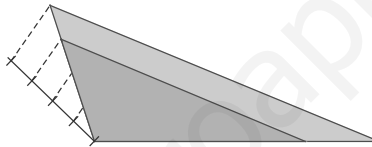
58. Divide un segmento de 8 cm de longitud en cuatro partes proporcionales a 1, 2, 4 y 4.



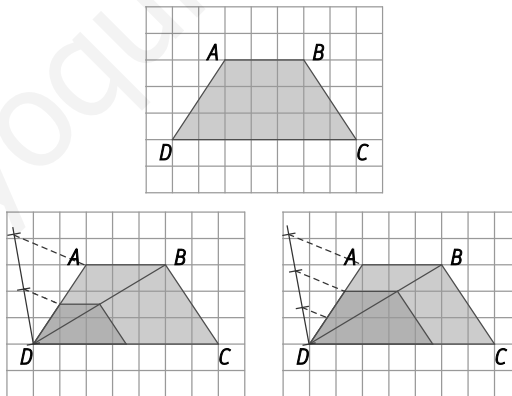
59. Construye en tu cuaderno un rectángulo de medidas 3 cm × 6 cm y, después, otro semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.



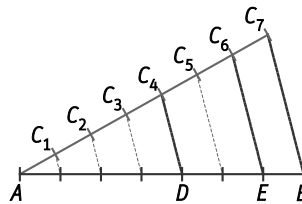
60. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 2 cm, 4 cm y 5 cm. Luego, construye otro triángulo semejante al anterior, con razón de semejanza 0,75.



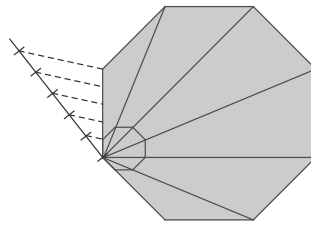
61. Construye en tu cuaderno dos polígonos semejantes al de la figura con razones de semejanza $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.



62. Divide un segmento de 4 cm en tres partes de forma que la primera sea el doble que la segunda, y esta, el doble que la tercera.

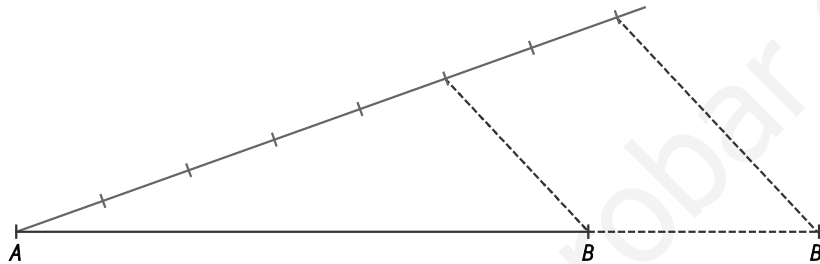


63. Dibuja en tu cuaderno un octógono regular y a continuación, construye otro semejante a este, cuyos lados sean un 20 % más pequeños. Comprueba, midiendo, que mantienen la razón de semejanza.

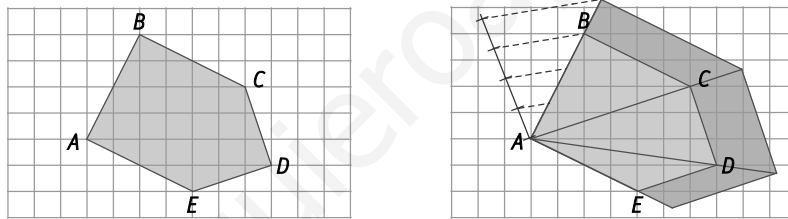


64. Actividad resuelta.

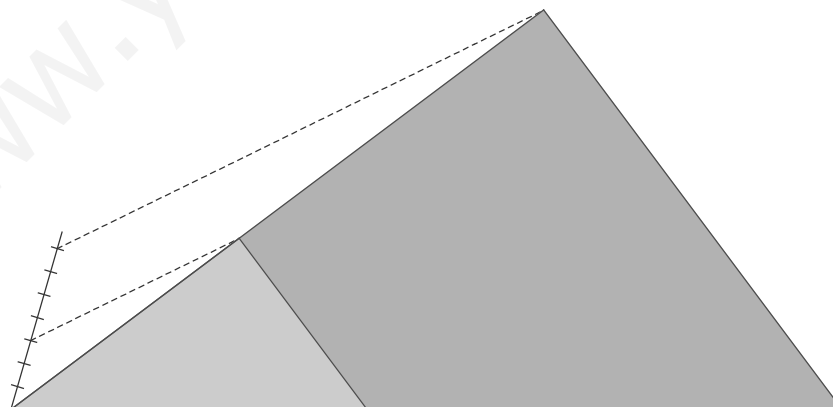
65. Dibuja un segmento en tu cuaderno de 8 cm de longitud y, a continuación, construye otro segmento semejante al primero, con razón de semejanza $\frac{7}{5}$.



66. Construye en tu cuaderno un polígono semejante al de la figura con razón de semejanza $\frac{4}{3}$.

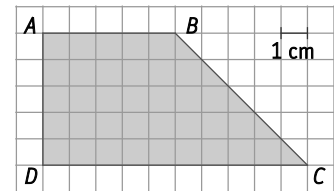


67. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Luego, construye otro triángulo semejante al anterior, con razón de semejanza $\frac{7}{3}$.



68. Dado el cuadrilátero de la figura:

- d) Halla la medida de sus cuatro lados y su perímetro.
 e) Dibuja un cuadrilátero de 44 cm de perímetro y semejante al anterior.



f) $AB = 5 \text{ cm}$ $BC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$
 $CD = 10 \text{ cm}$ $DA = 5 \text{ cm}$
 $P = 5 + 7,07 + 10 + 5 = 27,07 \text{ cm}$

Como los cuadriláteros son semejantes, la razón de semejanza es: $k = \frac{P'}{P} = \frac{44}{27,07} = 1,63$

Los lados del nuevo cuadrilátero miden:

$A'B' = 5 \cdot 1,63 = 8,15 \text{ cm}$ $B'C' = 7,07 \cdot 1,63 = 11,52 \text{ cm}$
 $C'D' = 10 \cdot 1,63 = 16,3 \text{ cm}$ $D'A' = 5 \cdot 1,63 = 8,15 \text{ cm}$

69. Un pentágono tiene tres lados que miden 5 cm, otro mide 4 cm y el último mide 6 cm. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior, con perímetro de 37,5 cm.

Los pentágonos son semejantes, por tanto, sus perímetros también lo son. La razón de semejanza es:

$$k = \frac{P'}{P} = \frac{37,5}{5+5+5+4+6} = \frac{3}{2}$$

Los lados miden: $5 \cdot \frac{3}{2} = 7,5 \text{ cm}$ $4 \cdot \frac{3}{2} = 6 \text{ cm}$ $6 \cdot \frac{3}{2} = 9 \text{ cm}$

70. Las medidas de un rectángulo son 3 cm y 5 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior, tal que su área mida 135 cm².

Como los rectángulos son semejantes, se cumple:

$$k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{135}{15} = 9 \Rightarrow k = 3$$

Los lados miden: $3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$ $3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}$

71. Los lados de un pentágono miden 4 cm, 3 cm, 3 cm, 5 cm y 5 cm, respectivamente, y su área mide 25 cm². Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior con área de 100 cm².

Los pentágonos son semejantes, por tanto, se cumple:

$$k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{100}{25} = 4 \Rightarrow k = 2$$

Los lados miden:

$4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}$ $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}$ $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}$ $5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}$ $5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}$

72. Un triángulo rectángulo tiene catetos de medidas 3 y 4 cm. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que el área de este segundo triángulo es de 24 cm².

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa del primer triángulo mide: $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ cm}$

Como los triángulos son semejantes, se cumple:

$$k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{24}{\frac{3 \cdot 4}{2}} = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow k = 2$$

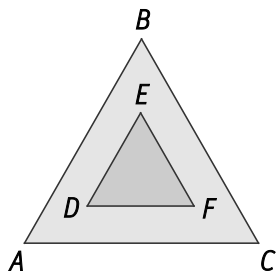
La hipotenusa del segundo triángulo mide: $h' = 5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}$.

73. Las áreas de dos cuadriláteros semejantes son 18 m^2 y $28,125 \text{ m}^2$, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del menor si el del mayor es de $22,5 \text{ m}$?

Los cuadriláteros son semejantes, por tanto la razón de semejanza es: $k^2 = \frac{A}{A'} = \frac{28,125}{18} = 1,5625 \Rightarrow k = 1,25$

El perímetro del menor mide: $1,25 = \frac{22,5}{P'} \Rightarrow P' = 18$

74. Los triángulos ABC y DEF son equiláteros. Si el área del mayor es de $6,93 \text{ cm}^2$ y el lado del menor mide 2 cm , ¿cuál es la razón de semejanza?



Calculamos la altura del triángulo menor por medio del teorema de Pitágoras:

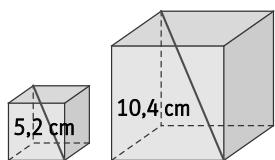
$$h = \sqrt{2^2 - \frac{2^2}{4}} = \sqrt{4 - 1} = 1,73 \text{ cm}$$

El área del triángulo menor es: $A = \frac{2 \cdot 1,73}{2} = 1,73 \text{ cm}^2$

Como los triángulos son semejantes, se cumple: $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{6,93}{1,73} = 4 \Rightarrow k = 2$

75. Las diagonales de dos cubos miden $5,2 \text{ cm}$ y $10,4 \text{ cm}$, respectivamente.

Si el volumen del primero es de 27 cm^3 , ¿cuál es el volumen del segundo?



Como los cubos son semejantes, se cumple: $k = \frac{d'}{d} = \frac{10,4}{5,2} = 2$

$$k^3 = \frac{V'}{27} = 8 \Rightarrow V' = 216$$

76. En un mapa se indica que la escala es $1:5000$.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la realidad representada?

a) Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de $7,3 \text{ cm}$, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

a) La razón de semejanza es $k = 5000$.

b) La distancia es $\frac{1}{5000} = \frac{7,3}{d} \Rightarrow d = 7,3 \cdot 5000 = 36500 \text{ cm} = 0,365 \text{ km}$.

77. La altura de un edificio es de 30 m . Se quiere construir una maqueta con escala $1:200$. ¿Cuál será la altura de ese edificio en la maqueta?

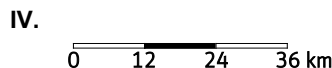
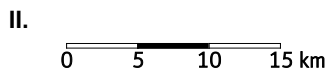
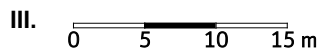
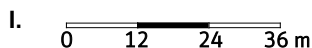
La razón de semejanza es $k = \frac{1}{200} = 0,005$.

La altura es $h = \frac{30}{200} = 0,15 \text{ m}$.

78. La distancia entre dos ciudades es de 350 km y la distancia que las separa en un mapa es de 7 cm . ¿Cuál es la escala de dicho mapa?

$$E = \frac{7}{35000000} = \frac{1}{5000000} \Rightarrow 1:5000000$$

79. Relaciona cada escala gráfica con cada una de las escalas numéricas.



A. 1:500 000

B. 1:500

C. 1:1 200 000

D. 1:1200

I. $E = \frac{3}{3600} = \frac{1}{1200}$. La respuesta correcta es D. 1:1200.

II. $E = \frac{3}{1\,500\,000} = \frac{1}{500\,000}$. La respuesta correcta es A. 1:500 000.

III. $E = \frac{3}{1500} = \frac{1}{500}$. La respuesta correcta es B. 1:500.

IV. $E = \frac{3}{3\,600\,000} = \frac{1}{1\,200\,000}$. La respuesta correcta es C. 1:1 200 000.

80. La distancia entre dos ciudades representadas en un mapa de escala 1:50 000 es de 10 cm. Calcula la distancia que separa a dichas ciudades en otro mapa de escala 1:125 000.

La distancia real entre las dos ciudades es: $\frac{1}{50\,000} = \frac{10}{d_{real}} \Rightarrow d_{real} = 500\,000$ cm

La distancia en el segundo mapa es: $\frac{1}{125\,000} = \frac{d_{mapa}}{500\,000} \Rightarrow d_{mapa} = \frac{500\,000}{125\,000} = 4$ cm

81. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los rectángulos son semejantes.

c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

f) Todos los triángulos rectángulos e isósceles son semejantes.

a) Cierto. Todos sus ángulos son iguales, como los lados de un mismo cuadrado también son iguales, podemos asegurar que son proporcionales a los de otro cuadrado.

b) Falso. Sus ángulos son iguales pero no podemos asegurar que sus lados sean proporcionales.

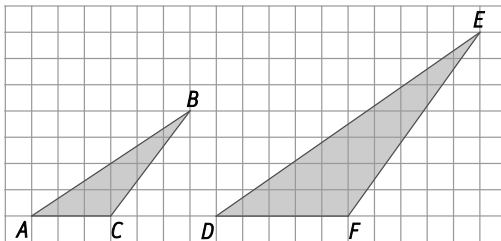
c) Cierto. Los triángulos equiláteros tienen los tres lados iguales y, por tanto, los tres ángulos. Cumplen el 1.º criterio de semejanza de triángulos.

d) Falso. Como son triángulos rectángulos, solo podemos asegurar que tienen un ángulo igual, el recto. No cumplen ningún criterio de semejanza.

e) Falso. Solo sabemos que tienen dos de sus lados iguales. No cumplen ningún criterio de semejanza.

f) Cierto. Por ser rectángulos tienen un ángulo igual y, por ser isósceles, los lados que lo forman también son iguales en un mismo triángulo y, por tanto, son proporcionales entre triángulos. Cumplen el 2.º criterio de semejanza de triángulos.

82. Con la ayuda del teorema de Pitágoras, calcula los lados de los triángulos ABC y DEF y comprueba si son semejantes.



$$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7,21$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = 3$$

$$DE = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149} = 12,21$$

$$EF = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} = 8,60$$

$$DF = 5$$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{12,21}{7,21} = 1,69 \neq \frac{EF}{BC} = \frac{8,60}{5} = 1,72 \neq \frac{DF}{AC} = \frac{5}{3} = 1,6 \Rightarrow \text{No son semejantes.}$$

83. Un edificio de cinco plantas de igual altura proyecta, en cierto instante, una sombra de 22 m. Calcula la altura de cada planta si se sabe que en ese mismo momento un árbol de 3 m de altura proyecta una sombra de 4,5 m.

Los triángulos que forman el edificio y su sombra y el árbol y su correspondiente sombra son semejantes. Por tanto: $\frac{3}{4,5} = \frac{h}{22} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 22}{4,5} = 14,6 \text{ m}$

Cada planta mide: $14,6 : 5 = 2,93 \text{ m}$

84. El cuarto de Javier es un rectángulo de dimensiones 3,15 m \times 3,78 m. ¿Qué dimensiones tendrá su representación en un plano con escala 1:21?

$$\frac{1}{21} = \frac{d_1}{3,15} \Rightarrow d_1 = \frac{3,15}{21} = 0,15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{21} = \frac{d_2}{3,78} \Rightarrow d_2 = \frac{3,78}{21} = 0,18 \text{ m} = 18 \text{ cm}$$

85. Las dimensiones de un jardín rectangular en un plano de escala 1:125 son 24 cm y 32 cm.

a) Calcula las dimensiones reales del jardín y expresa los resultados en metros.

b) Calcula el perímetro y el área del jardín.

a) $\frac{1}{125} = \frac{24}{d_1} \Rightarrow d_1 = 24 \cdot 125 = 3000 \text{ cm} = 30 \text{ m}$

$\frac{1}{125} = \frac{32}{d_2} \Rightarrow d_2 = 32 \cdot 125 = 4000 \text{ cm} = 40 \text{ m}$

b) $P = 30 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 60 + 80 = 140 \text{ m}$

$A = 30 \cdot 40 = 1200 \text{ m}^2$

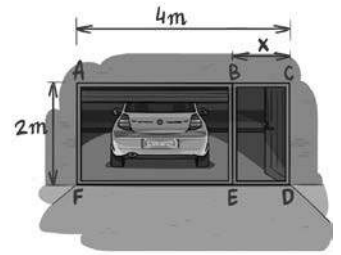
86. La distancia entre Badajoz y Lisboa en línea recta es de 230 km. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa con escala 1:1 200 000.

$$\frac{1}{1200000} = \frac{d}{230} \Rightarrow d = \frac{230}{1200000} = 0,000192 \text{ km} = 19,2 \text{ cm}$$

87. Se ha realizado una maqueta de 25 cm de la estatua de un parque para colocarla en el centro de exposiciones del colegio. Calcula la escala de la maqueta si la altura real de esa estatua es de 2 m.

$$E = \frac{25}{200} = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{La escala es } 1:8.$$

88. Se quiere colocar una puerta de garaje en la entrada de una casa, que tenga un acceso para los vehículos y otro para los peatones, como se muestra en la figura.



- Calcula el valor del lado x para que los rectángulos $ACDF$ y $BCDE$ sean semejantes.
- Halla las áreas de los rectángulos anteriores y comprueba la relación que existe entre su razón y la razón de semejanza.
- Comprueba si el rectángulo $ABEF$ es también semejante a los anteriores.

a) Para que los rectángulos sean semejantes: $\frac{4}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1 \text{ m}$

b) $A_{ACDF} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2$ $A_{BCDE} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2$

$k = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$ $\frac{8}{2} = 4 = k^2$

La razón de las áreas coincide con el cuadrado de la razón de semejanza.

c) Las dimensiones del rectángulo $ABEF$ son $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. Por tanto, la razón de proporcionalidad es:

$k = \frac{3}{2} = 1,5 \neq 2 \Rightarrow$ No es semejante a los anteriores.

89. Un triángulo isósceles tiene 10 cm de base y 20 cm de altura.

- Calcula el perímetro de dicho triángulo y del que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados.
- Halla la relación entre las áreas de los dos triángulos.

a) Calculamos los lados iguales mediante el teorema de Pitágoras: $l = \sqrt{20^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{425} = 20,62 \text{ cm}$.

$P = 20,62 + 20,62 + 10 = 51,23 \text{ cm}$

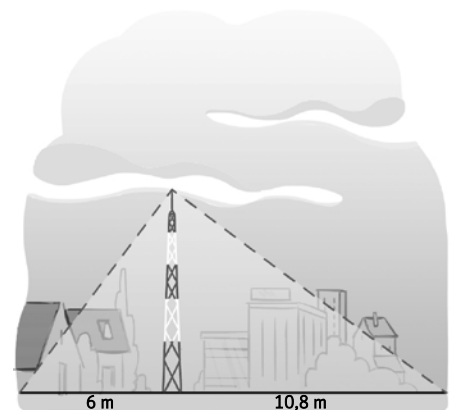
Al ser trazados desde el punto medio del triángulo inicial, los lados del nuevo triángulo miden la mitad.

$P' = \frac{20,62}{2} + \frac{20,62}{2} + \frac{10}{2} = 25,62 \text{ cm}$

b) $A = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ cm}^2$ $A' = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ cm}^2$

La relación entre las áreas es: $\frac{A'}{A} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

90. Una antena telefónica se encuentra sujeta al suelo por dos cables tensores que forman un ángulo recto. Los cables se encuentran anclados al suelo en dos puntos alineados con la base de la antena y que distan de ella 6 y $10,8 \text{ m}$.



- Calcula la altura de la antena.
- Halla la longitud de los cables.

a) Por el teorema de la altura:

$h^2 = 6 \cdot 10,8 = 64,8 \Rightarrow h = 8,05 \text{ m}$

b) Aplicando el teorema del cateto:

$b^2 = 6 \cdot (6 + 10,8) = 100,8 \Rightarrow b = 10,04 \text{ m}$

$c^2 = 10,8 \cdot (6 + 10,8) = 181,44 \Rightarrow c = 13,47 \text{ m}$

91. Actividad resuelta.

92. Tres latas de tomate tienen forma semejante y sus alturas respectivas son de 20 cm, 25 cm y 40 cm. Si el volumen de la lata mediana es de 250 cm^3 , halla los volúmenes de las otras dos latas.

$$k_{\text{grande} - \text{mediana}} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5} = 1,6 \qquad k_{\text{mediana} - \text{pequeña}} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$\frac{V_{\text{grande}}}{V_{\text{mediana}}} = 1,6^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{grande}}}{250} = 4,096 \Rightarrow V_{\text{grande}} = 1024 \text{ cm}^3$$

$$\frac{V_{\text{mediana}}}{V_{\text{pequeña}}} = 1,25^3 \Rightarrow \frac{250}{V_{\text{pequeña}}} = 1,953 \Rightarrow V_{\text{pequeña}} = 128 \text{ cm}^3$$

93. Una empresa de vehículos fabrica dos camiones semejantes para transporte de carburantes.

- Las alturas respectivas son de 2 m y 2,5 m.
- La superficie de material necesaria para construir el depósito del camión menor es de 18 m^2 .
- El volumen del depósito del camión mayor es de 48 kL.

Calcula el área necesaria para construir el depósito mayor y el volumen del depósito menor.

$$k = \frac{2}{2,5} = 0,8$$

$$\frac{A_{\text{menor}}}{A_{\text{mayor}}} = k^2 \Rightarrow \frac{18}{A_{\text{mayor}}} = 0,8^2 \Rightarrow A_{\text{mayor}} = \frac{18}{0,64} = 28,125 \text{ m}^2$$

$$\frac{V_{\text{menor}}}{V_{\text{mayor}}} = k^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{menor}}}{48} = 0,8^3 \Rightarrow V_{\text{menor}} = 24,576 \text{ kL}$$

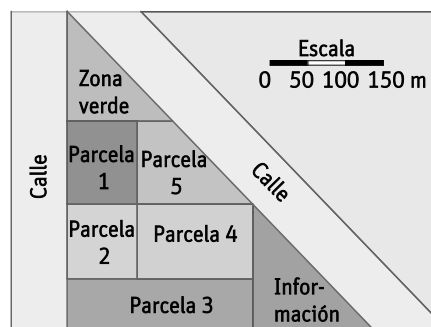
94. Van a replantar una parte de un parque siguiendo este plano.

a) Halla las dimensiones de cada parcela.

b) Calcula la superficie que ocupa la zona de información y la zona verde.

a) La escala es $E = \frac{1,5 \text{ cm}}{15000 \text{ cm}} = \frac{1}{10000}$.

Por tanto, una vez obtenidas las medidas en el plano en centímetros, para calcular las dimensiones reales, multiplicamos por 10 000 y las expresamos en metros.



	Dimensiones en el plano (cm)		Dimensiones en la realidad (m)	
	base	altura	base	altura
Zona verde	1,5	1,6	150	160
Parcela 1	1	1,2	100	120
Parcela 2	1	1	100	100
Parcela 3	2,6	0,75	260	75
Parcela 4	1,6	1	160	100
Parcela 5	0,5	1,6	50	160
Información	1,7	1,75	170	175

b) Zona verde: $A_{\text{plano}} = \frac{1,5 \cdot 1,6}{2} = 1,2 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{real}} = \frac{150 \cdot 160}{2} = 12000 \text{ m}^2$$

Información: $A_{\text{plano}} = \frac{1,7 \cdot 1,75}{2} = 1,4875 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{real}} = \frac{170 \cdot 175}{2} = 14875 \text{ m}^2$$

95. En un mapa de escala 1:50 000, la distancia que separa los dos extremos de un camino recto es de 6,5 cm. ¿Cuánto tiempo tardará una persona en realizar dicho camino andando a una velocidad de 5 km por hora?

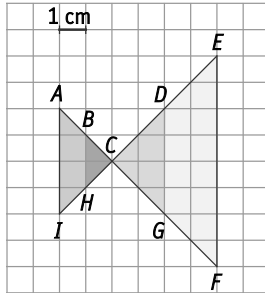
Calculamos la longitud real del camino.

$$\frac{1}{50000} = \frac{6,5}{d} \Rightarrow d = 6,5 \cdot 50000 = 325000 \text{ cm} = 3,25 \text{ km}$$

Como en 1 h recorre 5 km, en recorrer 3,25 km tardará:

$$\frac{1 \text{ h}}{5 \text{ km}} = \frac{x}{3,25 \text{ km}} \Rightarrow x = \frac{3,25}{5} = 0,65 \text{ h} = 39 \text{ min}$$

96. El siguiente esquema corresponde al diseño de un logotipo.



- a) Indica alguna razón que demuestre que los triángulos CEF y BCH son semejantes.

- b) Comprueba si los trapezios $ABHI$ y $DEFG$ son o no semejantes.

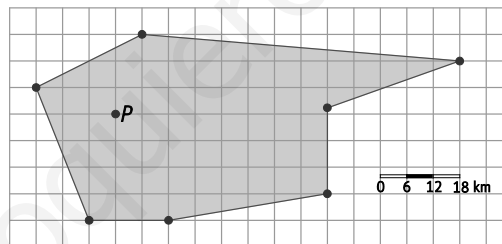
- c) Calcula la razón de las áreas de los trapezios $ABHI$ y $DEFG$.

- a) Tienen un ángulo igual (que tiene su vértice en el punto C), y los lados que lo forman son proporcionales. Por el 2.º criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

- b) $\frac{DG}{BH} = \frac{4}{2} = \frac{EF}{AI} = \frac{8}{4} \Rightarrow$ Son semejantes con razón de semejanza $k = 2$.

- c) Como son figuras semejantes: $\frac{A_{DEFG}}{A_{ABHI}} = k^2 = 4$

97. El plano siguiente representa una zona donde se quieren colocar molinos para la generación de energía eléctrica renovable.

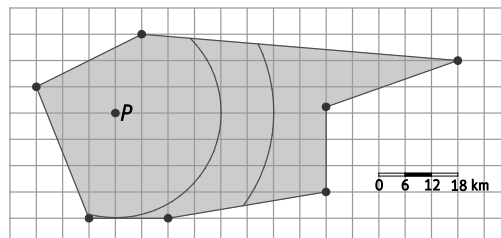


Los molinos deben estar situados a más de 24 km y a menos de 36 km del punto P . Copia el plano en tu cuaderno y señala la zona donde pueden ir ubicados los molinos.

Según la representación gráfica de la escala, 6 km corresponden al lado del cuadrado que forma la cuadrícula. Por tanto:

$$24 \text{ km} = 4 \cdot 6 \text{ km} \Rightarrow 4 \text{ cuadrados}$$

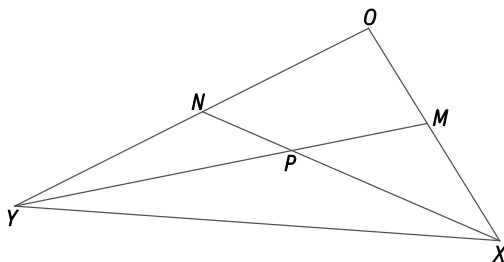
$$36 \text{ km} = 6 \cdot 6 \text{ km} \Rightarrow 6 \text{ cuadrados}$$



98. El triángulo rectángulo XOY tiene un ángulo recto en el vértice O y los puntos M y N son los puntos medios de los catetos OX y OY respectivamente. Si $XN = 19$ e $YM = 22$, ¿cuál es el valor de XY ?

- A. 24 B. 26 C. 28 D. 30

El punto P divide a cada uno de los segmentos XN y YM en dos partes de manera que NP y MP miden la mitad que PX y PY respectivamente.



Por tanto, los triángulos MNP y XPY , por el 2.º criterio de semejanza, son semejantes con razón $k = 2$ y, además, se cumple que $XY = 2 \cdot MN$.

Por otro lado, aplicamos el teorema de Pitágoras:

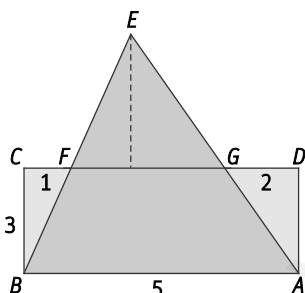
$$OM^2 = YM^2 - OY^2 \Rightarrow OM^2 = 22^2 - OY^2 \qquad ON^2 = XN^2 - OX^2 \Rightarrow ON^2 = 19^2 - OX^2$$

Como $MN^2 = OM^2 + ON^2$ se obtiene: $MN^2 = 22^2 - OY^2 + 19^2 - OX^2 = 22^2 + 19^2 - (OX^2 + OY^2)$

Sustituimos por XY : $\left(\frac{XY}{2}\right)^2 = 22^2 + 19^2 - XY^2 \Rightarrow XY^2 = \frac{4}{5}(22^2 + 19^2) = 676 \Rightarrow XY = 26$

La respuesta correcta es B. 26.

99. En el rectángulo $ABCD$, $AB = 5$ y $BC = 3$. Marcamos en el lado CD los puntos F y G con $CF = 1$ y $GD = 2$. Si las rectas AF y BG se cortan en E , ¿cuál es el área del triángulo AEB ?



- A. 10
B. $\frac{21}{2}$
C. 12
D. $\frac{25}{2}$

Los triángulos AEB y GEF son semejantes en posición de Tales.

Como $FG = 5 - (2 + 1) = 2$, la razón de semejanza es $k = \frac{5}{2}$.

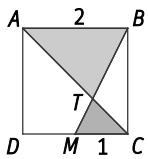
Se cumple que $\frac{A_{ABE}}{A_{GFE}} = k^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ y que

$$A_{ABE} = A_{ABFG} + A_{GFE} = \frac{5+2}{2} \cdot 3 + A_{GFE} = \frac{21}{2} + A_{GFE}$$

Por tanto, $\frac{\frac{21}{2} + A_{GFE}}{A_{GFE}} = \frac{25}{4} \Rightarrow A_{GFE} = 2$ y $A_{ABE} = \frac{21}{2} + 2 = \frac{25}{2}$

La respuesta correcta es D. $\frac{25}{2}$.

100. El lado del cuadrado $ABCD$ de la figura mide 2 cm. Si M es el punto medio del lado CD , el área del triángulo TMD es:



A. $\frac{1}{3} \text{ cm}^2$

C. $\frac{2}{7} \text{ cm}^2$

B. $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$

D. $\frac{3}{10} \text{ cm}^2$

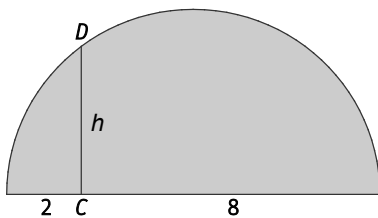
Se observa que los triángulos TMC y ABT son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$. Por tanto, la altura desde T hasta AB es el doble que la altura desde T hasta MC , siendo ésta un tercio de 2. Entonces,

$$A_{TMD} = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \text{ cm}^2.$$

La respuesta correcta es A. $\frac{1}{3} \text{ cm}^2$.

Encuentra el error

101. Calcula el valor de h en la siguiente figura.



El diámetro de la semicircunferencia mide 10 cm, por lo que el radio mide 5 cm.
Como el segmento CD une el diámetro con un punto cualquiera de la circunferencia: $h = 5 \text{ cm}$

¿Dónde está el error? Calcula la solución correcta.

El segmento CD no es un radio de la circunferencia, ya que no parte del centro.

Si unimos el punto D con ambos extremos del diámetro, obtenemos un triángulo rectángulo del cual, h es la altura.

Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$

PONTE A PRUEBA

La ley del cuadrado cubo

Actividad resuelta

Superficie de un continente

A continuación, se presenta un mapa de La Antártida.

Estima el área de la Antártida utilizando la escala que acompaña al mapa. Muestra cómo has hecho los cálculos y explica cómo has hecho tu estimación.

(Puedes descargar el mapa de smSaviadigital.com y dibujar sobre él, si te es útil para hacer la estimación.)

(Prueba PISA 2003)



La escala numérica del mapa es 1:100 000 000.

Para estimar dibujamos un cuadrado que contenga la superficie del mapa y medimos el lado: 5,7 cm. Por tanto, el lado en la realidad mide: $5,7 \cdot 100\,000\,000 = 570\,000\,000 \text{ cm} = 5\,700 \text{ km}$.

Y la superficie estimada será de $5\,700^2 = 32\,490\,000 \text{ km}^2$.

También se puede resolver de forma estimada dibujando un rectángulo, un círculo o sumando áreas estimadas de varias figuras geométricas regulares.

Pizzas

Una pizzería sirve dos pizzas redondas del mismo grosor y de diferente tamaño.

- La más pequeña tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 30 €.
- La mayor tiene un diámetro de 40 cm y cuesta 40 €.

¿Qué pizza tiene mejor precio? Muestra tu razonamiento.

(Prueba PISA 2003)

Para comprobarlo calculamos el precio por centímetro cuadrado de cada pizza.

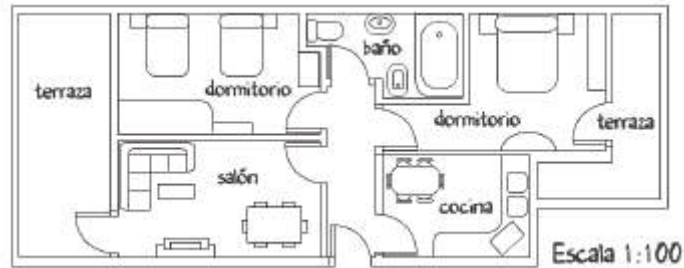
$$\text{— Pizza pequeña: } \frac{30}{\pi \cdot 15^2} = \frac{30}{706,86} = 0,04 \text{ € / cm}^2$$

$$\text{— Pizza grande: } \frac{40}{\pi \cdot 20^2} = \frac{40}{1256,68} = 0,03 \text{ € / cm}^2$$

El precio por centímetro cuadrado de la pizza grande es menor que el de la pizza pequeña. Tiene mejor precio la pizza grande.

Compra de un apartamento

Este es el plano del apartamento que los padres de Mónica quieren comprar a una agencia inmobiliaria.



Para calcular la superficie total del apartamento (incluidas la terraza y las paredes) puedes medir el tamaño de cada habitación, calcular la superficie de cada una y sumar todas las superficies.

No obstante, existe un método más eficaz para calcular la superficie total en el que sólo tienes que medir 4 longitudes. Señala en el plano anterior las cuatro longitudes necesarias para calcular la superficie total del apartamento.

Las cuatro longitudes son:

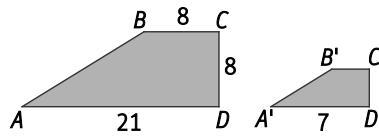
- El ancho total del apartamento, de terraza a terraza: 7,6 cm.
- El alto total del apartamento (la pared más larga de la terraza de la izquierda): 3 cm.
- El ancho mayor de la terraza de la derecha: 1,5 cm
- El alto que le falta a la terraza de la derecha para completar el plano como un rectángulo: 0,7 cm

El área del apartamento mide: $A = 7,6 \cdot 3 - 1,5 \cdot 0,7 = 22,8 - 1,05 = 21,75 \text{ cm}^2$ en el plano.

En la realidad mide: $A = 21,75 \cdot 10000 = 217500 \text{ cm}^2 = 21,75 \text{ m}^2$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las siguientes figuras son semejantes.



- a) Halla la medida del lado AB .
 b) Calcula la medida de los lados $A'B'$, $B'C'$ y $C'D'$.

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$AB = \sqrt{(21-8)^2 + 8^2} = \sqrt{13^2 + 8^2} = \sqrt{233} = 15,26.$$

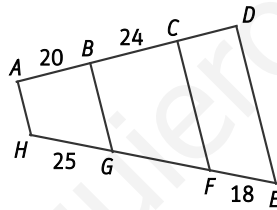
b) Calculamos la razón de semejanza: $k = \frac{A'D'}{AD} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{15,26} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'B' = 5,09$$

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'C'}{8} = \frac{1}{3} \Rightarrow B'C' = 2,67$$

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{C'D'}{8} = \frac{1}{3} \Rightarrow C'D' = 2,67$$

2. Observa la siguiente figura y calcula GF y CD .



$$\frac{AB}{HG} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \quad \frac{24}{GF} = \frac{4}{5} \Rightarrow GF = 30 \quad \frac{CD}{18} = \frac{4}{5} \Rightarrow CD = 14,4$$

3. Comprueba, si las siguientes parejas de triángulos son o no semejantes.

- a) Uno de lados 12, 9 y 4 y el otro, 12, 27 y 36
 b) Uno con ángulos 43° y 67° , y el otro, 70° y 67°

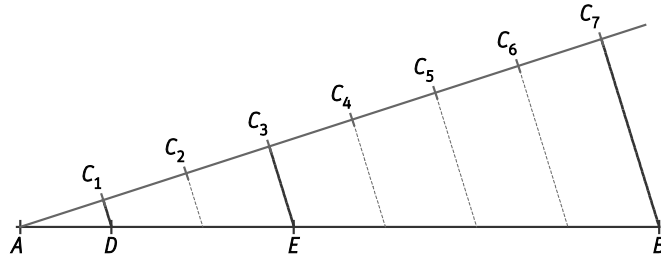
a) $\frac{12}{4} = \frac{27}{9} = \frac{36}{12} = 3$. Son semejantes.

b) El ángulo que falta en el primer triángulo mide: $180^\circ - (43^\circ + 67^\circ) = 110^\circ$.

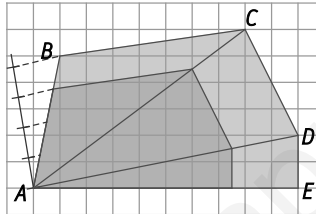
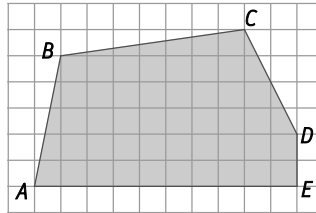
El ángulo que falta en el segundo triángulo mide: $180^\circ - (70^\circ + 67^\circ) = 43^\circ$.

Son semejantes.

4. Divide un segmento de 9 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 2 y 4.



5. Dibuja un polígono semejante al de la figura con razón de semejanza $\frac{3}{4}$.



6. La sombra de una casa de 21 m de altura es de 28 m. ¿Qué sombra proyectará en ese momento un árbol de 3 m de alto?

Los triángulos que forman la casa y su sombra y el árbol y su correspondiente sombra son semejantes. Por tanto:

$$\frac{21}{28} = \frac{3}{h} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 28}{21} = 4 \text{ m}$$

7. La distancia entre dos ciudades en un mapa de escala de 1:50 000 es de 4 cm. Calcula la distancia que separa dichas ciudades en otro mapa de escala 1:120 000.

La distancia real entre las ciudades es: $\frac{1}{50\,000} = \frac{4}{d} \Rightarrow d = 4 \cdot 50\,000 = 200\,000 \text{ cm}$

La distancia en el segundo mapa es: $\frac{1}{120\,000} = \frac{d}{200\,000} \Rightarrow d = \frac{200\,000}{120\,000} = 1,6 \text{ cm}$

8. Un coche que mide de largo 2,7 m en la realidad y su maqueta 15 cm. ¿Cuál es la escala de la maqueta?

$$E = \frac{15}{270} = \frac{1}{18}$$

La escala es 1:18.