EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 6: TEORÍA DE MUESTRAS

- Junio, Ejercicio D7
- Junio, Ejercicio D8
- Reserva 1, Ejercicio D7
- Reserva 1, Ejercicio D8
- Reserva 2, Ejercicio D7
- Reserva 2, Ejercicio D8
- Reserva 3, Ejercicio D7
- Reserva 3, Ejercicio D8
- Reserva 4, Ejercicio D7
- Reserva 4, Ejercicio D8
- Septiembre, Ejercicio D7
- Septiembre, Ejercicio D8

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una Ley Normal de varianza 7'84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9'5 9 10'2 8'6 11'4 10'8 12'6 11 11'8 14'5 10'4 9'8

a) (1'5 puntos) Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93'5 % para estimar la vida útil media de estas lavadoras.

b) (1 punto) Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99 %.

SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será:

$$\mu = \frac{9'5+9+10'2+8'6+11'4+10'8+12'6+11+11'8+11'5+10'4+9'8}{12} = \frac{129'6}{12} = 10'8$$

$$\frac{1+0'935}{2} = 0'9675 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'845$$

Desviación típica $\sigma = \sqrt{7'84} = 2'8$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(10'8 \mp 1'845 \frac{2'8}{\sqrt{12}}\right) = (10'8 \mp 1'491) = (9'309 \,;\, 12'291)$$

b) Calculamos el error máximo

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

$$E = 2'575 \cdot \frac{2'8}{\sqrt{50}} = 1'02$$

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una Ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) (1 punto) Si se desea qu en el 99 % de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas entre los hogares andaluces, la media no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?.

b) (0’5 puntos) Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿Qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria “Renta media anual muestral”?.

c) (1 punto) Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$ ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual sea superior a 25?.

SOCIALES II. 2020. JUNIO. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Calculamos el tamaño de la muestra.

$$E = 1 = 2'575 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 12'875 \Rightarrow n = 165'76 \simeq 166$$

b) Sigue una distribución: $N\left(24, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(24, 0'5)$

c)

$$p(x \geq 25) = p\left(z \geq \frac{25-24}{0'5}\right) = p(z \geq 2) = 1 - p(z \leq 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$$

El precio de venta al público del kilogramo de frambuesas sigue una ley Normal de media desconocida y varianza 9. En una localidad se eligen 10 comercios de manera aleatoria, obteniéndose los siguientes precios en euros:

12'3 10 9'1 11 10'5 11'8 9'9 11'5 10'9 13

a) (0'5 puntos) ¿Qué distribución siguen las medias de las muestras de tamaño 10?
b) (1 punto) Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97% para el precio medio del kilogramo de frambuesas.
c) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error cometido al estimar el precio medio del kilogramo de frambuesas sea menor a 1'5 euros.
SOCIALES II. 2020 RESERVA 1. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será: $\mu = \dfrac{12'3+10+9'1+11+10'5+11'8+9'9+11'5+10'9+13}{10} = 11$

Sigue una distribución: $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(11, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

b) $\dfrac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$

El intervalo de confianza de la media muestral es:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(11 - 2'17 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ 11 + 2'17 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = (8'9413;13'0586)$$

c)

$$E = 1'5 = 2'17 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 18'83 \simeq 19$$

Se sabe que la longitud, en centímetros, de una especie de estrella de mar en una determinada zona sigue una ley Normal con desviación típica 3. Para estimar la longitud media de esa especie de estrella de mar, se extrae una muestra de tamaño 36 y se obtiene el intervalo de confianza (6'04, 8) al 95%. Se pide:
a) (0'5 puntos) Calcule la media muestral.
b) (0'5 puntos) Calcule el error de estimación máximo cometido.
c) (1 punto) Si aumentamos el tamaño muestral a 49, ¿qué efecto produce sobre el error máximo cometido? Calcule este error.
d) (0.5 puntos) Si aumentamos el nivel de confianza, ¿qué efecto produce sobre el error de estimación máximo? Justifique la respuesta
SOCIALES II. 2020 RESERVA 1. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media: $\mu = \dfrac{6'04+8}{2} = 7'02$

b) $\dfrac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Calculamos el error máximo cometido: $E = 1'96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{36}} = 0'98$

c) Al aumentar el tamaño de la muestra el error disminuye y vale:

$$E = 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{49}} = 0'84$$

d) Si aumentamos el nivel de confianza, entonces, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ aumenta, con lo cual, el error aumenta.

La distancia en kilómetros recorrida al día por los vehículos de una empresa de coches de alquiler sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 225. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 coches y se obtiene el intervalo de confianza (153'65, 162'35) para la media poblacional.
a) (1 punto) Calcule la media muestral y el error máximo de estimación para ese intervalo de confianza.
b) (0'5 puntos) Si con el mismo nivel de confianza, aumentamos el tamaño muestral, ¿cómo se vería afectado el error?
c) (1 punto) Con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 3 km?
SOCIALES II. 2020 RESERVA 2. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será: $\mu = \dfrac{153'65 + 162'35}{2} = 158$

El error será: $E = 162'35 - 158 = 4'35$

b) Como el error viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si aumentamos el tamaño de la muestra, el error disminuye.

c) $\dfrac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

$$E = 3 = 1'96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 96'04 \simeq 97 \quad \text{coches}$$

El tiempo de espera para ser atendido en un servicio hospitalario es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica de 2 meses. Tomada una muestra al azar de 9 pacientes que han utilizado ese servicio, se han registrado los siguientes tiempos de espera en meses:

8'5 3'7 4'3 3'6 5'6 4'8 1'0 1'4 6'0

a) (1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 95% para el tiempo de espera medio poblacional.

b) (1 punto) Con un nivel de confianza del 97%, ¿qué tamaño muestral mínimo se ha de tomar para que el error máximo cometido en la estimación del tiempo de espera medio poblacional no exceda de un mes?

SOCIALES II. 2020 RESERVA 2. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será: $\mu = \dfrac{8'5+3'7+4'3+3'6+5'6+4'8+1'0+1'4+6'0}{9} = 4'32$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

El intervalo de confianza de la media muestral es:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(4'32 - 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}} \ , \ 4'32 + 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}\right) = (3'0134; 5'6266)$$

b) $\dfrac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$

$$E = 1 = 2'17 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 18'83 \simeq 19 \text{ pacientes}$$

El tiempo de desfase, en minutos, entre la hora de paso programada de un autobús por cierta parada y la hora real a la que pasa, sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 4. Se observa el paso del autobús por la parada en 10 ocasiones elegidas al azar, registrándose los siguientes desfases:

4’7 2’1 3’6 5’4 0’0 4’2 4’0 $-0'2$ 1’9 5’2

a) (1’25 puntos) Obtenga un intervalo de confianza al 97% para el desfase medio en la hora de paso del autobús.
b) (1’25 puntos) ¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el desfase medio con un error inferior a 30 segundos y un nivel de confianza del 95%? ¿Cómo variaría dicho tamaño muestral si se aumentara el nivel de confianza?
SOCIALES II. 2020 RESERVA 3. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será: $\mu = \dfrac{4'7+2'1+3'6+5'4+0'0+4'2+4'0-0'2+1'9+5'2}{10} = 3'09$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

El intervalo de confianza de la media muestral es:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3'09 - 2'17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \ , \ 3'09 + 2'17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (1'7176; 4'4624)$$

b) $\dfrac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

30 segundos $= 0'5$ minutos

$$E = 0'5 = 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 61'46 \simeq 62 \text{ paradas de autobús}$$

Si se aumenta el nivel de confianza, entonces el tamaño de la muestra aumenta.

Una tienda de ropa quiere estudiar la aceptación de un nuevo sistema de pago a través del teléfono móvil. Para ello realiza una encuesta entre 200 de sus clientes elegidos al azar, resultando que 150 de ellos sí estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.
a) (1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de clientes de esa tienda que estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.
b) (1 punto) Mediante una nueva encuesta se quiere estimar la proporción de clientes de esa tienda que usarían el nuevo sistema de pago, con un error máximo del 3% y un nivel de confianza del 94%. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿a cuántos clientes como mínimo habría que realizar la encuesta?
SOCIALES II. 2020 RESERVA 3. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\,,\,p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p=\frac{150}{200}=0'75$$

$$\frac{1+0'97}{2}=0'985\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'17$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'75-2'17\cdot\sqrt{\frac{0'75\cdot0'25}{200}}\,,0'75+2'17\cdot\sqrt{\frac{0'75\cdot0'25}{200}}\right)=(0'6836;0'8164)$$

b) $\frac{1+0'94}{2}=0'97\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1'88$

Aplicamos la fórmula del error:

$$E=0'03=1'88\cdot\sqrt{\frac{0'75\cdot0'25}{n}}\Rightarrow n=736'33\simeq737$$

Tomada al azar una muestra de 600 alumnos de una universidad española, se encontró que $\frac{2}{3}$ de los mismos podían expresarse en inglés con fluidez.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 98% para estimar la proporción de alumnos de esa universidad que pueden expresarse en inglés con fluidez. ¿Se podría admitir a ese nivel de confianza que la proporción de alumnos de esa universidad que pueden expresarse en inglés con fluidez es $\frac{13}{20}$?
b) (0'25 puntos) Teniendo en cuenta el intervalo anterior, ¿qué error máximo se cometería en dicha estimación?
c) (0'75 puntos) Si se mantienen la misma proporción muestral y la misma confianza, ¿cuántos alumnos como mínimo habría de tener una muestra para que el error de estimación sea inferior al 2%?
SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1+0'98}{2} = 0'99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(\frac{2}{3} - 2'33 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{600}}, \frac{2}{3} + 2'33 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{600}}\right) = (0'6218; 0'7114)$$

Como $\frac{13}{20} = 0'65$ está dentro del intervalo de confianza, si se puede admitir.

b) Aplicamos la fórmula del error: $E = 2'33 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{600}} = 0'0448$

c) $E = 0'02 = 2'33 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{n}} \Rightarrow n = 3016'05 \simeq 3017$

La cantidad de café por taza que suministra una máquina de café sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica $0'8\ \text{cm}^3$. En una muestra de 45 tazas suministradas por esa máquina, se ha medido un total de $5400\ \text{cm}^3$ de café.

a) (0'5 puntos) Calcule el estimador puntual para la cantidad media de café por taza que suministra la máquina.

b) (1 punto) Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la cantidad media de café por taza que suministra la máquina.

c) (1 punto) Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo que se ha de tomar para que, al estimar la cantidad media de café por taza, el error cometido sea inferior a $0'2\ \text{cm}^3$.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será: $\mu = \dfrac{5400}{45} = 120$

El estimador media muestral sigue una distribución $N\left(120, \dfrac{0'8}{\sqrt{45}}\right) = N(120, 0'119)$

b) $\dfrac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$

El intervalo de confianza de la media muestral es:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(120 - 2'17 \cdot \frac{0'8}{\sqrt{45}}\ ,\ 120 + 2'17 \cdot \frac{0'8}{\sqrt{45}}\right) = (119'7413; 120'2587)$$

b)

$$E = 0'2 = 2'17 \cdot \frac{0'8}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 75'34 \simeq 76 \text{ tazas}$$

a) (1 punto) Una población de 25.000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15.000, 5.000, 3.000 y 2.000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) (1'5 puntos) Dada la población $P=\{2,4,6\}$, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se pueden formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE. EJERCICIO D7

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular el tamaño de la muestra.

$$\left.\begin{array}{l} 25.000 \rightarrow 3.000 \\ x \rightarrow 36 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 300 \text{ personas}$$

Calculamos la composición de esa muestra

$$\left.\begin{array}{l} 25.000 \rightarrow 15.000 \\ 300 \rightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 180 \text{ personas del estrato 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 25.000 \rightarrow 5.000 \\ 300 \rightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 60 \text{ personas del estrato 2}$$

36 personas del estrato 3

$$\left.\begin{array}{l} 25.000 \rightarrow 2.000 \\ 300 \rightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 24 \text{ personas del estrato 4}$$

b) Escribimos todas las muestras posibles de tamaño 2.

(2,2) (2,4) (2,6)
(4,2) (4,4) (4,6)
(6,2) (6,4) (6,6)

Las medias muestrales son:

2 3 4
3 4 5
4 5 6

Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	2	10	50
6	1	6	36
	9	36	156

Media $= \mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{36}{9} = 4$; Desviación típica $= \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2} = \sqrt{\dfrac{156}{9} - 4^2} = 1'15$

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9'2 10 8'5 12 9 11'3 7 8'5 8'3 7'6 9 9'4 10'5 8'9 6'8

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) (1'5 puntos) Halle un intervalo de confianza al 97'5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) (1 punto) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0'3 minutos?.

SOCIALES II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO D8

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será:

$$\mu = \frac{8+9'2+10+8'5+12+9+11'3+7+8'5+8'3+7'6+9+9'4+10'5+8'9+6'8}{16} = 9$$

$$\frac{1+0'975}{2} = 0'9875 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'24$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(9 \mp 2'24 \frac{2}{\sqrt{16}}\right) = (9 \mp 1'12) = (7'88\ ;\ 10'12)$$

b)

$$\frac{1+0'90}{2} = 0'95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$$

$$E = 0'3 = 1'645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 120'26 \simeq 121 \text{ pacientes}$$