

**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES****TEMA 4: FUNCIONES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea la función definida de la forma  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 10x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Halle el dominio de  $f$ .  
b) Estudie la derivabilidad de  $f$  en  $x = 2$ .  
c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .  
**SOCIALES II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

## R E S O L U C I Ó N

a) Dominio  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

b) Estudiamos primero la continuidad en  $x = 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x-1} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - 10x) = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua en } x = 2, \text{ por lo tanto, no es}$$

derivable en  $x = 2$

c) La recta tangente en  $x = 0$  es  $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 0 = -2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -2x$

Sea la función  $f$  definida mediante  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ L(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Determine  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f$  es continua y tiene un mínimo en  $x = -1$ .

b) Para  $a = -1$  y  $b = 1$ , estudie la derivabilidad de  $f$  en  $x = -1$  y en  $x = 1$ .

**SOCIALES II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

## R E S O L U C I Ó N

a) Por ser continua se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} L(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

mínimo en  $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow -2 + a = 0$

Resolviendo, tenemos que:  $a = 2$  ;  $b = -3$

b) La función que tenemos es:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ L(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudiamos primero la continuidad en  $x = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} L(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No es continua, por lo tanto, tampoco es derivable.}$$

Como la función que tenemos en  $x = -1$  es polinómica, la función es continua y derivable en  $x = -1$ .

Sea la función  $f$  definida mediante  $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

a) Determine los puntos de corte con los ejes.

b) Estudie su curvatura.

c) Determine sus asíntotas.

d) Represente la función.

**SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Corte con el eje X  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$

Corte con el eje Y  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-1) - 2 \cdot (x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

|            |                                     |                                    |
|------------|-------------------------------------|------------------------------------|
|            | $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ | $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ |
| Signo $f'$ | -                                   | -                                  |
| Función    | D                                   | D                                  |

Luego la función es decreciente en su dominio.

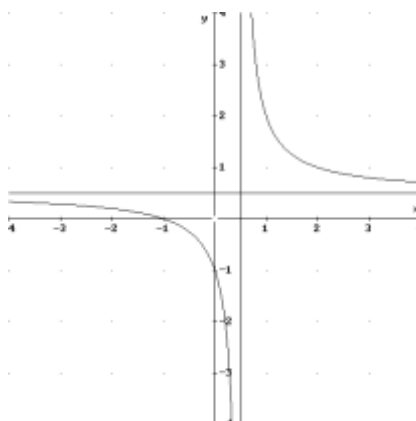
c) *Verticales*: La recta  $x = a$  es una asíntota vertical si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

*Horizontales*: La recta  $y = b$  es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

*Oblicuas*: No tiene.



a) La gráfica de la derivada de una función  $f$  es la recta que pasa por los puntos  $(0, -3)$  y  $(4, 0)$ .

Estudie la monotonía de la función  $f$

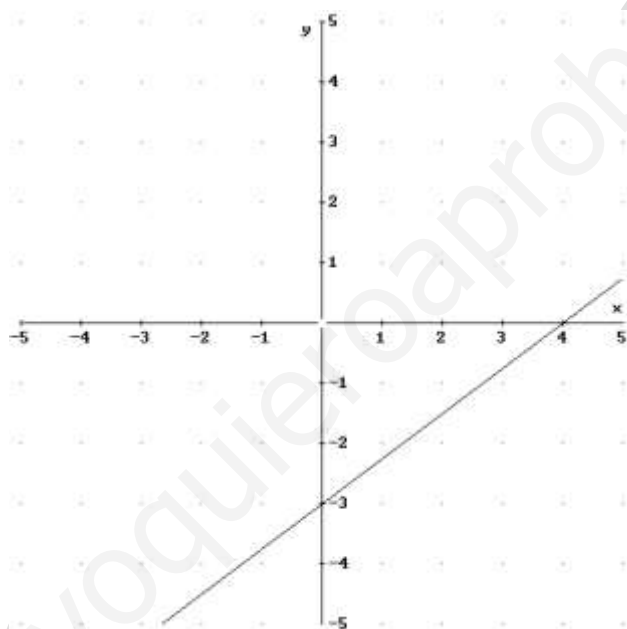
b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = (3x+1)^3 \cdot \ln(x^2+1) \quad ; \quad h(x) = \frac{e^x}{7x^5-4}$$

**SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que  $f'(x)$  es positiva en el intervalo  $(4, \infty)$ , luego en ese intervalo  $f(x)$  será creciente.

Vemos que  $f'(x)$  es negativa en el intervalo  $(-\infty, 4)$ , luego en ese intervalo  $f(x)$  será decreciente.

b)

$$g'(x) = 3 \cdot (3x+1)^2 \cdot 3 \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1} (3x+1)^3$$

$$h'(x) = \frac{e^x(7x^5-4) - 35x^4 \cdot e^x}{(7x^5-4)^2}$$

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675 \quad ; \quad x \geq 0$$

donde  $x$  representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

- Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
- Calcule el valor de  $x$  que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.
- Represente gráficamente la función  $B$ .

**SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

## R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación

$$0 = -3x^2 + 120x + 675 \Rightarrow x = 45$$

Luego, a partir de 45.000 € no obtiene beneficios.

b) El vértice es  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-6} = 20$

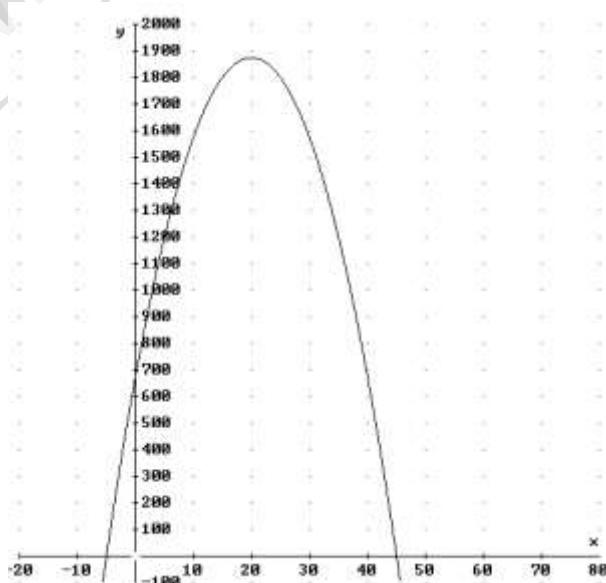
Luego, el máximo beneficio se obtiene para  $x = 20.000$  €

c) Calculamos la derivada de la función:

$$B'(x) = -6x + 120 \quad ; \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 120 = 0 \Rightarrow x = 20$$

|                | $(0, 20)$ | $(20, \infty)$ |
|----------------|-----------|----------------|
| Signo $B'(x)$  | +         | -              |
| Función $B(x)$ | C         | D              |

d)



Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^{7x}$

b)  $g(x) = 3^x \cdot \ln(x)$

c)  $h(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^5 - 6x)^6$

d)  $i(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 2}$

**SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a)  $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{7x} + 7 \cdot e^{7x} \cdot (x^3 + 1)$

b)  $g'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot 3^x$

c)  $h'(x) = 2x \cdot (x^5 - 6x)^6 + 6 \cdot (x^5 - 6x)^5 (5x^4 - 6)(x^2 + 1)$

d)  $i'(x) = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 2) - 2x \cdot (x+1)^2}{(x^2 - 2)^2}$

Sea la función  $f(x) = x^3 - 6x^2$ .

a) Determine sus puntos de corte con los ejes.

b) Calcule sus extremos relativos y su punto de inflexión.

c) Represente gráficamente la función.

**SOCIALES II. 2008 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

## R E S O L U C I Ó N

a)

Corte con el eje X  $\Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 6 \Rightarrow (0,0) ; (6,0)$

Corte con el eje Y  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 4$$

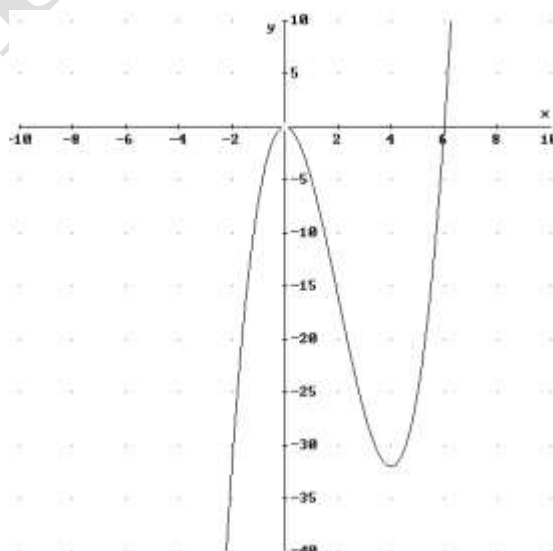
|            | $(-\infty, 0)$ | $(0, 4)$ | $(4, \infty)$ |
|------------|----------------|----------|---------------|
| Signo $y'$ | +              | -        | +             |
| Función    | C              | D        | C             |

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 Máximo  $(0,0)$     mínimo  $(4, -32)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{El punto de inflexión está en } (2, -16)$$

c) Hacemos la representación gráfica.



Sea la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule  $a$  y  $b$ , sabiendo que  $f(2) = 7$  y que  $f$  es continua en  $x = 1$ .

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = -1$ .

**SOCIALES II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 4 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = a + b$$

$$f(2) = 7 \Rightarrow 2a + b = 7$$

Resolviendo el sistema sale:  $a = 2$  ;  $b = 3$

b) La recta tangente en  $x = -1$  es  $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = 5$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-1) = -2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 5 = -2 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -2x + 3$

Sea la función  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

a) ¿Es  $f$  continua en  $x = 0$ ? ¿Es continua en su dominio?.

b) ¿Es  $f$  derivable en  $x = 0$ ? ¿Es derivable en su dominio?.

c) Estudie la monotonía de  $f$ .

**SOCIALES II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

## R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0$$

La función es continua en su dominio, ya que  $e^x$  y  $x^2 + x + 1$  son continuas.

b) Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \text{Es derivable en } x = 0$$

La función es derivable en su dominio, ya que  $e^x$  y  $x^2 + x + 1$  son derivables.

c)

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \text{No} ; 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{No}$$

|            | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|------------|----------------|---------------|
| Signo $y'$ | +              | +             |
| Función    | C              | C             |

- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{2}{x}$  en el punto de abscisa 1.
- b) Sea la función  $g(x) = x^3 + ax^2 + b$ . Calcule  $a$  y  $b$  sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto (2,5).
- SOCIALES II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en  $x=1$  es  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$

$$f(1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 2 = -2 \cdot (x-1) \Rightarrow y = -2x + 4$

b)

- Pasa por (2,5)  $\Rightarrow f(2) = 5 \Rightarrow 8 + 4a + b = 5 \Rightarrow 4a + b = -3$

- Punto de inflexión en  $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -12$

Resolviendo el sistema, tenemos que:  $a = -6$  ;  $b = 21$

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = \frac{3}{x}$  en el punto de abscisa  $x = -1$ .

b) Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $g(x) = ax + \frac{b}{x}$  tenga un extremo relativo en el punto  $(1, 2)$ .

**SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en  $x = -1$  es  $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = -3$$

$$f'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f'(-1) = -3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y + 3 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -3x - 6$

b)

$$\text{- Extremo relativo en } x = 1 \Rightarrow g'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{1^2} = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\text{- Pasa por } (1, 2) \Rightarrow g(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

Resolviendo el sistema, tenemos que:  $a = 1$  ;  $b = 1$

Dada la función  $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$ , determine:

- La monotonía y la curvatura de  $f$ .
- Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = -1$ .

**SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

|            | $(-\infty, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|------------|----------------|----------|---------------|
| Signo $f'$ | +              | -        | +             |
| Función    | C              | D        | C             |

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 Máximo  $(0, 4)$     mínimo  $(2, 0)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

|             | $(-\infty, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|-------------|----------------|---------------|
| Signo $f''$ | -              | +             |
| Función     | Cn             | Cx            |

$\downarrow$   
 P.I.  $(1, 2)$

c) La recta tangente en  $x = -1$  es  $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(-1) = 9$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y + 0 = 9 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 9x + 9$