

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B
- Ponencia 16
- Ponencia 17
- Ponencia 18
- Ponencia 19
- Ponencia 20
- Ponencia 21

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$

a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$

b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f

c) Calcule $\int f(x) dx$

SOCIALES II. 2019 JUNIO EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como tiene que ser paralela a la recta $y = 3x - 3$, la pendiente vale 3, luego: $f'(x) = 3$

$$f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2$$

La ecuación de la tangente en $x = 2$ es: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 2 = -8$$

$$f'(2) = 3$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 8 = 3 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 3x - 14$

La ecuación de la tangente en $x = -2$ es: $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2)$

$$f(-2) = (-2)^3 - 9 \cdot (-2) + 2 = 12$$

$$f'(-2) = 3$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Rightarrow y - 12 = 3 \cdot (x + 2) \Rightarrow y = 3x + 18$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$	$(+\sqrt{3}, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

Creciente: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$; Decreciente: $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$

Tiene un máximo relativo en el punto $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3} + 2)$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3} + 2)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

Cóncava: $(-\infty, 0)$; Convexa: $(0, +\infty)$; Tiene un punto de inflexión en $(0, 2)$.

c) Calculamos la integral que nos piden:

$$\int (x^3 - 9x + 2) dx = \int x^3 dx - 9 \int x dx + 2 \int dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C$$

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a , estudie la derivabilidad de f .

b) Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f . ¿Tiene algún punto de inflexión?

SOCIALES II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{1}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. La función polinómica $x^2 + a$ es continua en $x \geq 0$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x = 0$.

Calculamos a para que sea continua en $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x-1} \right) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + a) &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1$$

La función que tenemos es: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -1 \\ f'(0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) La función que tenemos es: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calculamos la derivada e igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Igualemos la derivada a cero: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
Función	D	C

La función es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$

Calculamos la segunda derivada e igualamos a cero: $f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No hay ningún valor de x que anule la 2ª derivada, luego:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

La función es convexa en $(0, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0)$. No tiene punto de inflexión

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad g(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot e^{2x-1}$$

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^2 - 6x + 8$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente gráficamente la función h y la recta tangente hallada.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{-1 \cdot (1+x) - 1(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1-x^2}$$

$$g'(x) = 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x \cdot e^{2x-1} + 2 \cdot e^{2x-1} \cdot (x^2 + 1)^2 = 2 \cdot e^{2x-1} \cdot (x^2 + 1) \cdot [2x + (x^2 + 1)]$$

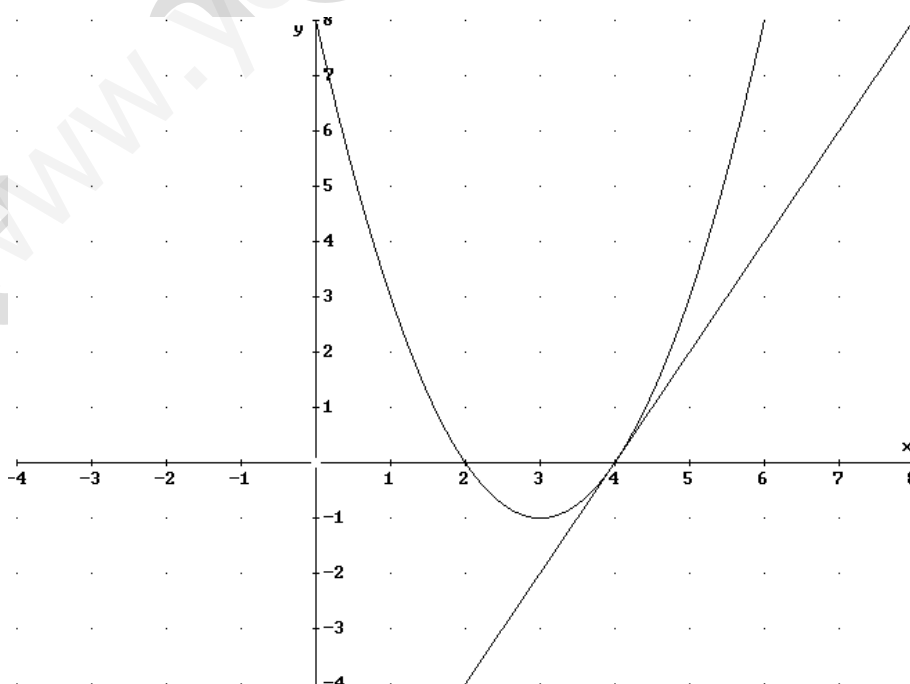
b) La recta tangente en $x = 4$ es $y - h(4) = h'(4) \cdot (x - 4)$

$$- h(4) = 16 - 24 + 8 = 0$$

$$- h'(x) = 2x - 6 \Rightarrow h'(4) = 8 - 6 = 2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = 2 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = 2x - 8$

Dibujamos la parábola y la recta haciendo una tabla de valores



Se considera la función $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$, con $x \neq 0$, siendo a y b dos parámetros reales.

a) Determine el valor de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 3)$.

b) Para $a = 1$ y $b = 2$, razone si en el punto $(1, 3)$ la función presenta un máximo o un mínimo.

c) Calcule $\int \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) dx$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\text{- Extremo relativo en } x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow f'(x)=2ax-\frac{b}{x^2} \Rightarrow f'(1)=2a-b=0$$

$$\text{- Pasa por } (1, 3) \Rightarrow f(1)=3 \Rightarrow a+b=3$$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a=1$; $b=2$

b) Calculamos la monotonía de la función $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = 0 \Rightarrow x=1$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	—	—	+
Función	D	D	C

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$

Tiene un mínimo relativo en $(1, 3)$

$$c) \int \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| + C$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ ax^2 + 4x & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = -1$, compruebe si es derivable en $x = 1$.

c) Para $a = -1$, determine los extremos relativos de la función y el valor de la función en dichos extremos.

d) Para $a = -1$, represente gráficamente la función en su dominio.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) La función $x^2 + 2x$ al ser polinómica es continua y derivable en su dominio. La función $ax^2 + 4x$ al ser polinómica es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x = 1$. Como es continua en $x = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + 4x) &= a + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow a = -1$$

b) Vamos a estudiar la derivabilidad en $x = 1$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 4 \\ f'(1^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 1$$

c) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$.

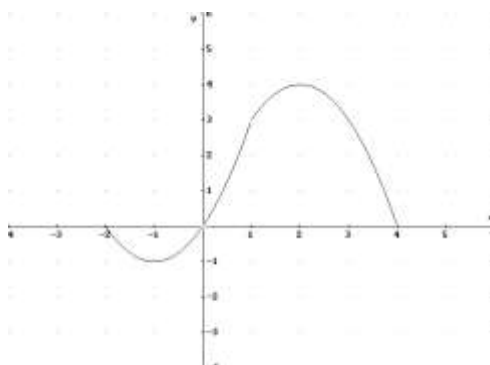
$$f'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$
Signo $f'(x)$	-	+	+	-
Función	D	C	C	D

La función es decreciente en $(-2, -1) \cup (2, 4)$ y creciente en $(-1, 1) \cup (1, 2)$.

Tiene un máximo en $(2, 4)$ y un mínimo en $(-1, -1)$.

d)



- a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- b) Dada la función $g(x) = x^3 + bx^2 + c$, calcule los valores de b y c sabiendo que g tiene un extremo relativo en $x = -1$ y que su gráfica pasa por el punto $(-1, 3)$.
- SOCIALES II. 2019 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCION B**

R E S O L U C I Ó N

a) La función $x^2 + 4x + 1$ al ser polinómica es continua y derivable en su dominio y la función exponencial e^{-x} también es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$.

$$1) f(0) = e^0 = 1$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 4x + 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$3) f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Luego, es continua en $x = 0$ y es continua en su dominio.

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 4 \\ f'(0^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

Luego, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Calculamos la derivada de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + c \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2bx$

- Extremo relativo en $x = -1 \Rightarrow g'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 3 - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

- Pasa por $(-1, 3) \Rightarrow g(-1) = 3 \Rightarrow (-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + c = 3 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Halle a y b de forma que f tenga un extremo relativo en $x=1$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=0$ tenga pendiente $m=-1$.

b) Para $a=-1$ y $b=-1$, estudie la monotonía y la curvatura de la función f .

SOCIALES II. 2019 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\text{Extremo relativo en } x=1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$\text{Tangente en } x=0 \text{ pendiente } m=-1 \Rightarrow f'(0) = -1 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

Luego: $a = -1$; $b = -1$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; $x = -\frac{1}{3}$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	—	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

Tiene un Máximo en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo en $(1, 0)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
Signo $f''(x)$	—	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y convexa en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\right)$

Unos productores de cereales realizan un estudio para conocer la posible demanda de su producto. Concluyen que la función de demanda de dichos cereales tiene la forma $D(x) = -200x^3 + 2100x^2 - 7200x + 10000$, para $0 \leq x \leq 4$, donde x es el precio en euros por kilogramo de producto y $D(x)$ es la cantidad de kilogramos de cereales que los consumidores están dispuestos a comprar a dicho precio x .

a) ¿Cuál es la cantidad de cereales demandada si el precio es de 0'50 euros por kilogramo?

b) Calcule para qué precio se alcanza una demanda mínima del producto y determine dicha demanda.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$D(x) = -200 \cdot (0'5)^3 + 2100 \cdot (0'5)^2 - 7200 \cdot 0'5 + 10000 = 6900 \text{ Kilogramos de cereales}$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$D'(x) = -600x^2 + 4200x - 7200 = 0 \Rightarrow x = 3 ; x = 4$$

	(0,3)	(3,4)
Signo $D'(x)$	-	+
Función	D	C

La función es creciente en el intervalo (3,4) y decreciente en el intervalo (0,3)

Tiene un mínimo en (3,1900)

Luego, la demanda mínima es de 1900 kilogramos y se alcanza para una precio de 3 €

Se considera la función $f(x) = x - \frac{3x-1}{x+1}$.

a) Indique el dominio de f y calcule $f'(x)$.

b) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{2}{3}$.

c) Halle los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a dicha gráfica es horizontal.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

$$a) f(x) = x - \frac{3x-1}{x+1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{Calculamos la derivada: } f'(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x+1) - 1 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$b) m = f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 3}{\left(\frac{2}{3} + 1\right)^2} = -\frac{11}{25}$$

c) Si la tangente es horizontal $\Rightarrow m = 0$

$$\text{Luego: } f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -3$$

Por lo tanto, los puntos donde la recta tangente es horizontal son: $(1, 0)$ y $(-3, -8)$

Se considera la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

a) Estudie su monotonía y halle sus extremos relativos.

b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. Calcule su punto de inflexión.

c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

d) Calcule $\int f(x) dx$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = 3$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Signo f'	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 3)$

Tiene un Máximo en $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ y un mínimo en $(3, 1)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f''	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa en el intervalo $(2, +\infty)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(2, \frac{5}{3}\right)$

c) La pendiente de la recta tangente es: $f'(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3 = m$

d) Calculamos la integral

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \right) dx = \frac{1}{3} \int x^3 dx - 2 \int x^2 dx + 3 \int x dx + \int dx = \frac{1}{3} \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + x + C =$$

$$= \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + C$$

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x-1)^2 + 1$, con $0 \leq x \leq 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

b) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

c) Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

SOCIALES II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$C'(x) = 2 \cdot 2 \cdot (2x-1) \cdot 2 = 16x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
Signo $C'(x)$	-	+
Función	D	C

La función es decreciente en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

b) Nos piden el mínimo absoluto, que puede estar en los extremos del intervalo, es decir, en $x=0$ ó en $x=2$, ó en el mínimo relativo. Calculamos el valor que toma la función en esos puntos para ver cuál es el mínimo absoluto.

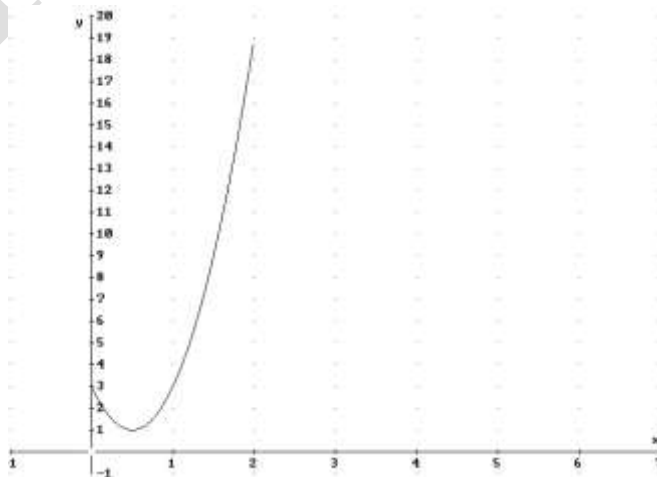
$$C(0) = 3$$

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$C(2) = 19$$

Luego, el coste mínimo es con una producción de 0'5 millones de kilogramos y vale 1.

c) Hacemos la gráfica de la función



De una cierta función f , sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

b) Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) Calcule la función f , sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 3)$.

SOCIALES II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo f'	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el intervalo: $(-1, 1)$.

Tiene un máximo en el punto $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo f''	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $x = 0$

b) Calculamos la integral

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = 3 \frac{x^3}{3} - 3x + C = x^3 - 3x + C$$

Como sabemos que pasa por el punto $(-1, 3)$, entonces:

$$f(-1) = 3 \Rightarrow (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + C = 3 \Rightarrow C = 1$$

Luego, la función es: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$

a) Calcule los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2,5)$

b) Para $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$, estudie sus extremos relativos.

c) Calcule $\int \left(x^2 + 3x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 16

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la deriva: $x = -1 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

Por tener un extremo en $(2,5) \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + b = 0 \\ f(2) = 5 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + 11 = 5 \end{cases}$

Luego, resolviendo el sistema: $\begin{cases} 12a + b = 0 \\ 8a + 2b + 11 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{8} ; b = -\frac{9}{2}$

b) Calculamos la derivada de $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$ y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Decreciente en $(-2, 2)$.

Tiene un máximo en $(-2, 17)$ y un mínimo en $(2, 5)$

c) Calculamos la integral

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 + 3x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx &= \int x^2 dx + 3 \int x dx + 6 \int \frac{dx}{x} - 2 \int x^{-2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + 6 \ln|x| - 2 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6 \ln|x| + \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} a-x & \text{si } x \leq -3 \\ -3a-x^2 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ x^2-8x+17 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Determine el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a ¿es $f(x)$ derivable en todo su dominio?.

b) Para $a = -3$, esboce la gráfica de la función $f(x)$.

c) Calcule $\int (x^2 - 8x + 17) dx$

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 17

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos a para que sea continua en $x = -3$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} (a-x) = a+3 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} (-3a-x^2) = -3a-9 \end{array} \right\} \Rightarrow a+3 = -3a-9 \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow a = -3$$

Luego, para $a = -3$, la función es continua en su dominio.

$$\text{Calculamos la función derivada: } f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } -3 < x < 2 \\ 2x-8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = -3$:

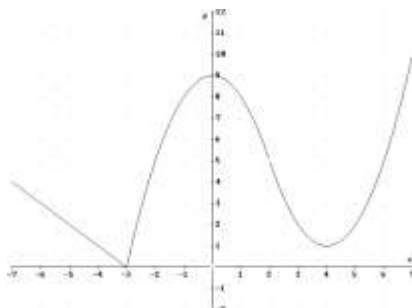
$$\left. \begin{array}{l} f'(-3^-) = -1 \\ f'(-3^+) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(-3^-) \neq f'(-3^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = -3$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow \text{Es derivable en } x = 2$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3\}$

$$\text{b) Dibujamos la función: } f(x) = \begin{cases} -3-x & \text{si } x \leq -3 \\ 9-x^2 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ x^2-8x+17 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



c) Calculamos la integral

$$\int (x^2 - 8x + 17) dx = \int x^2 dx - 8 \int x dx + 17 \int dx = \frac{x^3}{3} - 8 \frac{x^2}{2} + 17x + C = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 17x + C$$

Se considera la función $f(x) = \frac{-4x+1}{2x-5}$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Calcule las asíntotas de la función $f(x)$.

c) Calcule $\int \left(-2 - \frac{9}{2x-5} \right) dx$

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 18

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{-4 \cdot (2x-5) - 2 \cdot (-4x+1)}{(2x-5)^2} = \frac{18}{(2x-5)^2} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$\left(-\infty, \frac{5}{2} \right)$	$\left(\frac{5}{2}, +\infty \right)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

La función es creciente en su dominio, es decir: $\left(-\infty, \frac{5}{2} \right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty \right)$.

b) Calculamos las asíntotas

$$\text{Verticales: } x = \frac{5}{2}, \text{ ya que: } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} \frac{-4x+1}{2x-5} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} \frac{-4x+1}{2x-5} = -\infty$$

$$\text{Horizontales: } y = -2, \text{ ya que: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x+1}{2x-5} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{-4}{2} = -2$$

Oblicuas: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

c) Calculamos la integral

$$\int \left(-2 - \frac{9}{2x-5} \right) dx = -2 \int dx - 9 \int \frac{dx}{2x-5} = -2x - 9 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{2x-5} = -2x - \frac{9}{2} \ln |2x-5| + C$$

Dada la función $f(x) = 2(x + e^{2x})$ calcule:

- Los puntos de inflexión de la función $f(x)$, en caso de que existan.
 - La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
 - Calcule la función $F(x)$ sabiendo que $F'(x) = f(x)$ y que su gráfica pasa por el punto $(0, 2)$
- SOCIALES II. 2019. PONENCIA 19**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 2(1 + 2e^{2x})$$

$$f''(x) = 2 \cdot 4e^{2x} = 8 \cdot e^{2x} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+
Función	Cx

La función es convexa en su dominio y no tiene puntos de inflexión.

b) La ecuación de la tangente en $x = 0$ es: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 2(0 + e^{2 \cdot 0}) = 2$$

$$f'(x) = 2(1 + 2e^{2x}) \Rightarrow f'(0) = 2(1 + 2e^{2 \cdot 0}) = 6$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 2 = 6 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 6x + 2$

c) Calculamos la integral

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2(x + e^{2x}) dx = 2 \int x dx + \int 2e^{2x} dx = x^2 + e^{2x} + C$$

Como sabemos que: $F(0) = 2 \Rightarrow 0 + e^{2 \cdot 0} + C = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$

Luego, la función que nos piden es: $F(x) = x^2 + e^{2x} + 1$

De una cierta función f , sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

- Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f y calcule las abscisas de los puntos extremos relativos.
- Determine la curvatura de la función f y la abscisa de su punto de inflexión.
- Sabiendo que la función f pasa por el punto $(0,1)$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.
- Calcule la expresión de la función f , sabiendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,1)$.

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 20

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la cero: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3; x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 3)$

Máximo en $x = -1$ y mínimo en $x = 3$.

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$

Punto de inflexión en $x = 1$.

c) La ecuación de la tangente en $x = 0$ es: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow f'(0) = -9$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 1 = -9 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -9x + 1$

d) Calculamos la integral

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x - 9) dx = 3 \int x^2 dx - 6 \int x dx - 9 \int dx = 3 \frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} - 9x + C = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

Como sabemos que: $f(0) = 1 \Rightarrow 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

Luego, la función que nos piden es: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

La función de beneficios de una empresa, expresada en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x , expresada en miles de kg, según la función $B(x)$. Si la función de beneficios marginales de la empresa (derivada de la función de beneficios) tiene la expresión

$$B'(x) = 140 - \frac{180}{x+1} - 40x, \text{ se pide:}$$

- Determine la cantidad a producir por la empresa para maximizar los beneficios.
- Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de beneficios de la empresa.
- Obtenga la expresión de la función de beneficios $B(x)$, si se considera que, si no se produce nada, el beneficio es nulo, es decir, $B(0) = 0$.

SOCIALES II. 2019. PONENCIA 21

R E S O L U C I Ó N

a y b) Igualamos la derivada a cero.

$$\begin{aligned} B'(x) = 140 - \frac{180}{x+1} - 40x = 0 &\Rightarrow \frac{140x + 140 - 180 - 40x^2 - 40x}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{100x - 40 - 40x^2}{x+1} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -40x^2 + 100x - 40 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
Función	D	C	CD

La función es creciente en $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ y decreciente en $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

Máximo en $x = 2$ y mínimo en $x = \frac{1}{2}$.

El máximo beneficio $B(2)$, se obtiene fabricando 2000 kg de producto.

c) Calculamos la integral

$$B(x) = \int \left(140 - \frac{180}{x+1} - 40x \right) dx = 140 \int dx - 180 \int \frac{dx}{x+1} - 40 \int x dx = 140x - 180 \ln|x+1| - 20x^2 + C$$

Como sabemos que: $B(0) = 0 \Rightarrow 140 \cdot 0 - 180 \ln 1 - 20 \cdot 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Luego, la función que nos piden es: $B(x) = 140x - 180 \ln|x+1| - 20x^2$