

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

De la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina f .

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por $(0,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(x)$.

$$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = 3 \cdot \int (x+1)^{-2} dx = 3 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-3}{x+1} + C$$

Como queremos que pase por el punto $(2,0)$, tenemos:

$$f(2) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{3} + C = 0 \Rightarrow C = 1$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden será: $f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1$

b) Calculamos una primitiva de $f(x)$.

$$F(x) = \int \left(\frac{-3}{x+1} + 1 \right) dx = -3 \ln(x+1) + x + C$$

Como queremos que pase por el punto $(0,1)$, tenemos:

$$F(0) = 1 \Rightarrow -3 \ln(0+1) + 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden será: $F(x) = -3 \ln(x+1) + x + 1$

Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = bx \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - bx = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = b$$

$$A = \int_0^b (bx - x^2) dx = \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^3}{6} = \frac{9}{2} \Rightarrow b = 3$$

Calcula $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$x = -3 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

Con lo cual:

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int_{-2}^0 \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{4} [\ln(x-1)]_{-2}^0 - \frac{1}{4} [\ln(x+3)]_{-2}^0 = -\frac{\ln 3}{2}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1) \cdot e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$u = x-1; \quad du = dx$$

$$dv = e^{2x} dx; \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\int (x-1) \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1, e^2)$.

$$e^2 = \frac{1}{2} \cdot (1-1) \cdot e^2 - \frac{1}{4} e^2 + C \Rightarrow C = \frac{5}{4} e^2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = \frac{1}{2}(x-1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + \frac{5}{4} \cdot e^2$

Considera la integral definida $I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

- a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables $1+\sqrt{x} = t$.
b) Calcula I .

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$1+\sqrt{x} = t \Rightarrow x = (t-1)^2$$
$$dx = 2 \cdot (t-1) dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x = 1 \Rightarrow t = 2$$
$$x = 9 \Rightarrow t = 4$$

Con lo cual:

$$I = 2 \int_2^4 \frac{t-1}{t} dt = 2 \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 2 \cdot [t - \ln t]_2^4 = 4 - 2 \ln 2$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de la misma de ordenada $y = 1$, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.

b) Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

$$a) 1 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = \frac{2}{3} \\ f'(2) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Luego: } \left. \begin{array}{l} P(2,1) \\ f'(2) = m = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-2x + 7}{3}$$

b)

$$A = \int_0^2 \left[\left(\frac{-2x + 7}{3} \right) - \left(\frac{-x^2 + 2x + 3}{3} \right) \right] dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2 - 4x + 4}{3} \right] dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{9} u^2$$

Considera las funciones $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = 1 - 2^x$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x . Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y las gráficas de f y g .

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A = \int_1^2 [\ln x - (1 - 2^x)] dx = \left[x \ln x - x - x + \frac{2^x}{\ln 2} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 2 + \frac{2}{\ln 2} u^2$$

Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = \left(\frac{1}{3}x - b\right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$y = \left(\frac{1}{3}x - b\right)^2 = \frac{x^2 - 6bx + 9b^2}{9}$$

$$\text{Vértice } -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{6b}{9}}{\frac{2}{9}} = 3b \Rightarrow (3b, 0)$$

$$A = \int_0^{3b} \frac{x^2 - 6bx + 9b^2}{9} dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6bx^2}{2} + 9b^2x \right]_0^{3b} = \frac{1}{9} \left[\frac{27b^3}{3} - \frac{54b^3}{2} + 27b^3 \right] = b^3 = 8 \Rightarrow b = 2$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$.

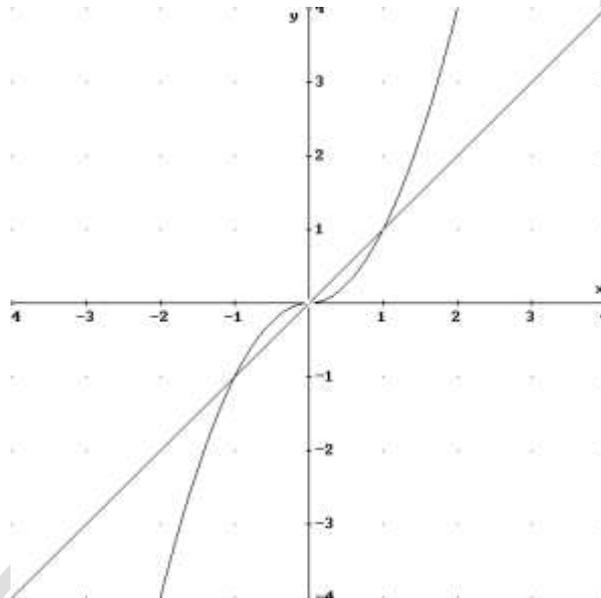
a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



b)

$$A = 2 \cdot \int_0^1 [x - x^2] dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} u^2$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$y' = e^x - 4e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$$

	$(-\infty, \ln 2)$	$(\ln 2, \infty)$
Signo y'	-	+
Función	D	C

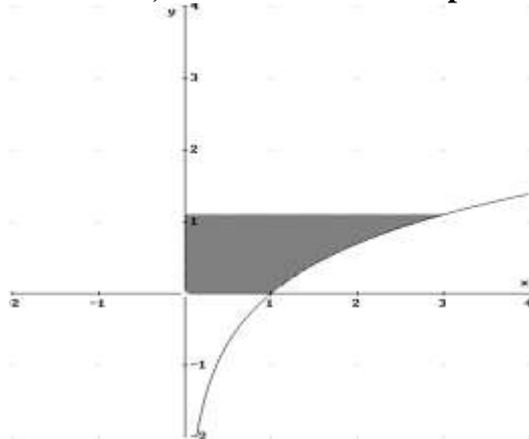
↓
mínimo $(\ln 2, 4)$

No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo.

b)

$$A = \int_0^2 [e^x + 4e^{-x}] dx = [e^x - 4e^{-x}]_0^2 = e^2 - \frac{4}{e^2} + 3$$

Siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x , halla el área de la superficie sombreada.



MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A_1 = \int_1^3 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^3 = (3 \ln 3 - 3) - (1 \ln 1 - 1) = 3 \ln 3 - 2$$

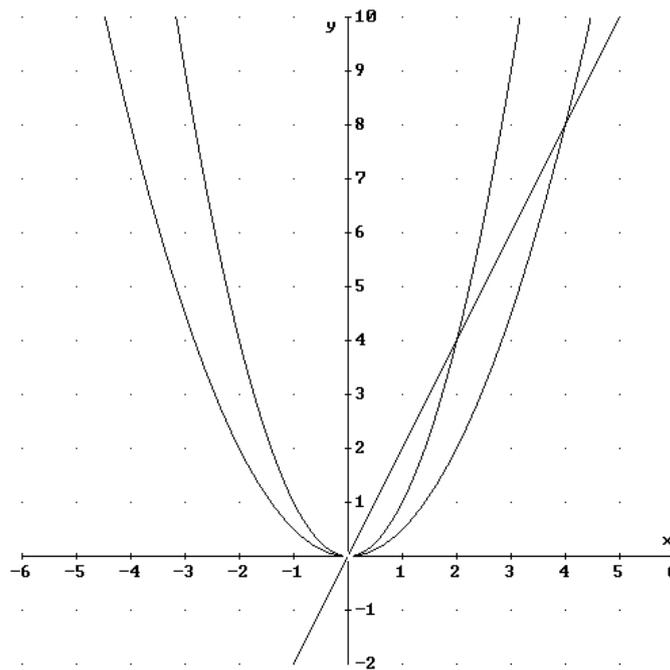
$$\text{Área del rectángulo} = \text{base} \times \text{altura} = 3 \ln 3$$

$$\text{Área pedida} = \text{Área del rectángulo} - A_1 = 3 \ln 3 - (3 \ln 3 - 2) = 2$$

Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y por las curvas $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] dx + \int_2^4 \left[2x - \frac{x^2}{2} \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_2^4 = \\ &= \left[\frac{8}{3} - \frac{8}{6} + 16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6} \right] = 4 \text{ u}^2 \end{aligned}$$