

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} dx = \int -1 dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2} dx = -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1 ; x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow -1=3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2}{x^2+x-2} dx &= -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2} dx = -x + \int \frac{-\frac{1}{3}}{(x-1)} dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)} dx = \\ &= -x - \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{4}{3} \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Determina la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$. (\ln denota la función logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Integramos, por partes, para calcular $f'(x)$

$$f'(x) = \int \ln(x) \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$u = \ln(x); \, du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = dx; \, v = x$$

Volvemos a integrar, por partes, para calcular $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x \ln x - x + C) \, dx = \int x \ln x \, dx - \int x \, dx + \int C \, dx = \int x \ln x \, dx - \frac{x^2}{2} + Cx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx - \frac{x^2}{2} + Cx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + Cx + D = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + Cx + D \end{aligned}$$

$$u = \ln(x); \, du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = x \, dx; \, v = \frac{x^2}{2}$$

Calculamos el valor de las constantes C y D .

$$\text{Tangente horizontal} \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 0 = 1 \cdot \ln 1 - 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\text{Pasa por el punto } (1, 2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1 \cdot \ln 1}{2} - \frac{3}{4} + 1 + D \Rightarrow D = \frac{7}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + x + \frac{7}{4}$

Calcula $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ (Sugerencia $\sqrt{x+2} = t$)

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t = \sqrt{x+2}$, vamos a calcular cuánto vale dx y x :

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} dx \Rightarrow dx = 2 \cdot \sqrt{x+2} dt = 2t dt$$

$$t = \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow x = t^2 - 2$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2t dt}{(t^2 - 2 - 2) \cdot t} = \int \frac{2t dt}{(t^2 - 4) \cdot t} = \int \frac{2 dt}{t^2 - 4}$$

Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{t^2 - 4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2) + B(t+2)}{t^2 - 4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A , y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t = 2 \Rightarrow 2 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$t = -2 \Rightarrow 2 = -4A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{2 dt}{(t^2 - 4)} = \int \frac{A dt}{t+2} + \int \frac{B dt}{t-2} = -\frac{1}{2} \ln|t+2| + \frac{1}{2} \ln|t-2| + C$$

Des hacemos el cambio de variable:

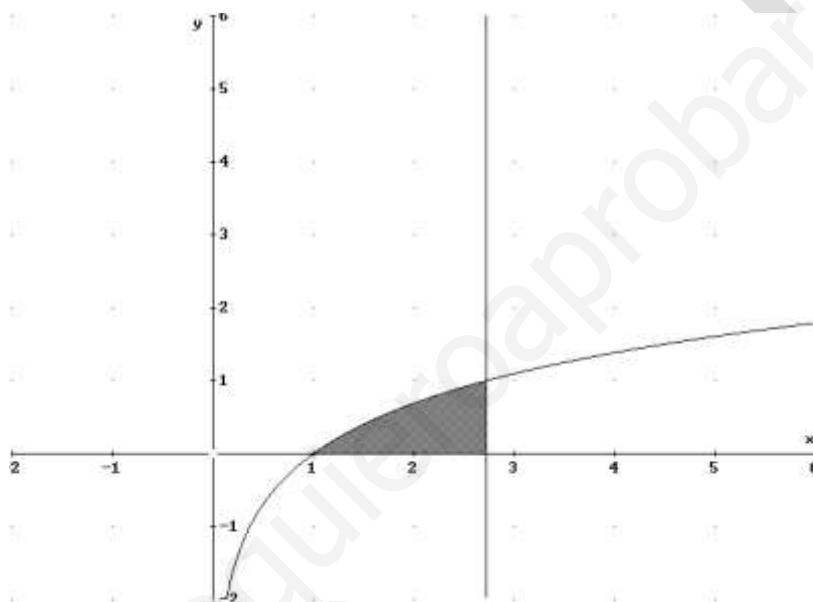
$$\int \frac{2 dt}{(t^2 - 4)} = -\frac{1}{2} \ln|t+2| + \frac{1}{2} \ln|t-2| + C = -\frac{1}{2} \ln|\sqrt{x+2} + 2| + \frac{1}{2} \ln|\sqrt{x+2} - 2| + C$$

Sea g la función definida por $g(x) = \ln(x)$ para $x > 0$ (\ln denota la función logaritmo neperiano). Calcula el valor de $a > 1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g , el eje de abscisas y la recta $x = a$ es 1.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El recinto es:



Calculamos el área.

$$A = \int_1^a \ln x \, dx$$

Hacemos la integral por partes:

$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} \, dx$ $dv = dx; \quad v = x$	$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$
--	--

$$A = \int_1^a \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^a = (a \ln a - a) - (1 \ln 1 - 1) = a \ln a - a + 1 = 1 \Rightarrow a \ln a - a = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow e^1 = a$$

Luego: $a = e$

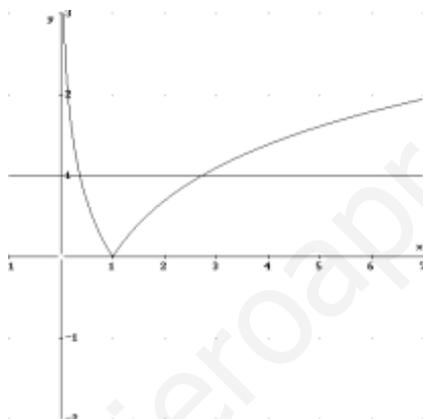
Sea f la función definida por $f(x) = |\ln(x)|$ para $x > 0$ (\ln denota la función logaritmo neperiano).

- Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.
- Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = 1$.
- Calcula el área del recinto citado.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \Rightarrow x = e \\ -\ln x = 1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^1 [1 - (-\ln x)] dx + \int_1^e [1 - (\ln x)] dx = [x + x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x - x \ln x + x]_1^e = \frac{1}{e} + e - 2$$

Recuerda que la integral de $\ln x$ es por partes:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$u = \ln x; du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

Calcula $\int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos la integral por partes.

$$\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \int e^{2x} \cdot \cos x dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \left[e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x dx \right]$$

$$\begin{aligned} u &= e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv &= \operatorname{sen} x dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv &= \cos x dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$I = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \left[e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot I \right]$$

$$I + 4I = -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x$$

$$I = \frac{-e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x}{5} + C$$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$ para $x > 0$ (\ln denota la función logaritmo neperiano)

y sea F la primitiva de f tal que $F(1) = 2$.

a) Calcula $F'(e)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = e$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x) = \int f(x) dx$, y además: $F'(x) = f(x)$.

Por lo tanto:

$$F'(e) = f(e) = \frac{\ln e}{2e} = \frac{1}{2e}$$

b) Calculamos $F(x)$. Para ello hacemos el cambio de variable $\ln x = t$, con lo cual

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{2x} dx = \int \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4} + C = \frac{(\ln x)^2}{4} + C$$

$$\text{Como } F(1) = 2 \Rightarrow \frac{(\ln 1)^2}{4} + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Por lo tanto: } F(x) = \frac{(\ln x)^2}{4} + 2$$

Calculamos la recta tangente que nos piden: $y - F(e) = F'(e) \cdot (x - e)$

$$F(e) = \frac{(\ln e)^2}{4} + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$F'(e) = f(e) = \frac{\ln e}{2e} = \frac{1}{2e}$$

Luego, la recta tangente es: $y - \frac{9}{4} = \frac{1}{2e} \cdot (x - e)$

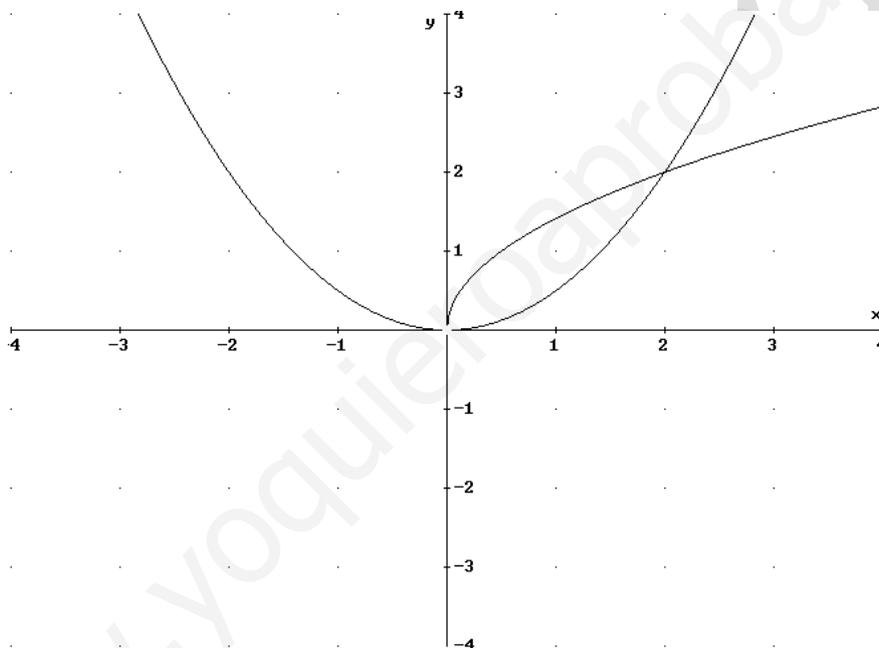
Sean $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \sqrt{2x}$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

- a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . Haz un esbozo del recinto que limitan.
 b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

- a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



En el dibujo vemos que los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(2,2)$.

- b) Luego, el área que nos piden es:

$$A = \int_0^2 \left[\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2 \right] dx = \left[\frac{2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3} u^2$$

Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\frac{4}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + ax \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (1-a)x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = a-1$$

Calculamos el área:

$$A = \int_0^{a-1} (-x^2 + ax - x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{a-1} = -\frac{(a-1)^3}{3} + \frac{a(a-1)^2}{2} - \frac{(a-1)^2}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación por Ruffini, sale que $a = 3$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 1$ y sea F la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(2, \ln 2)$ (\ln denota logaritmo neperiano).

a) Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P .

b) Determina la función F .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x) = \int f(x) dx$, y además: $F'(x) = f(x)$.

Calculamos la recta tangente que nos piden: $y - F(2) = F'(2) \cdot (x - 2)$

$$F(2) = \ln 2$$

$$F'(2) = f(2) = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

Luego, la recta tangente es: $y - \ln 2 = \frac{5}{4} \cdot (x - 2)$

b) Calculamos $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x-1)} dx$

Las raíces del denominador son: $x = 0$; $x = 0$; $x = 1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A \cdot x \cdot (x-1) + B(x-1) + C \cdot x^2}{x^2 \cdot (x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A , B y C sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $x = 2$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 = C \Rightarrow C = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow 5 = 2A + B + 4C \Rightarrow A = -1$$

Con lo cual:

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x-1)} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = -\ln x + \frac{1}{x} + 2 \ln(x-1) + C$$

Como $F(x)$ pasa por el punto $(2, \ln 2)$ entonces: $\ln 2 = -\ln 2 + \frac{1}{2} + 2 \ln 1 + C \Rightarrow C = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$

Por lo tanto: $F(x) = -\ln x + \frac{1}{x} + 2 \ln(x-1) + 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$

Calcula $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x) dx$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x) = \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \left[x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx \right] = \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x^2; \quad du = 2x dx \\ dv &= \operatorname{sen} x dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= \cos x dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= \left[-x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} = \\ &= \left(-\pi^2 \cdot \cos \pi + 2\pi \cdot \operatorname{sen} \pi + 2 \cos \pi \right) - \left(-0^2 \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0 + 2 \cos 0 \right) = \\ &= \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = |x^2 - 4|$

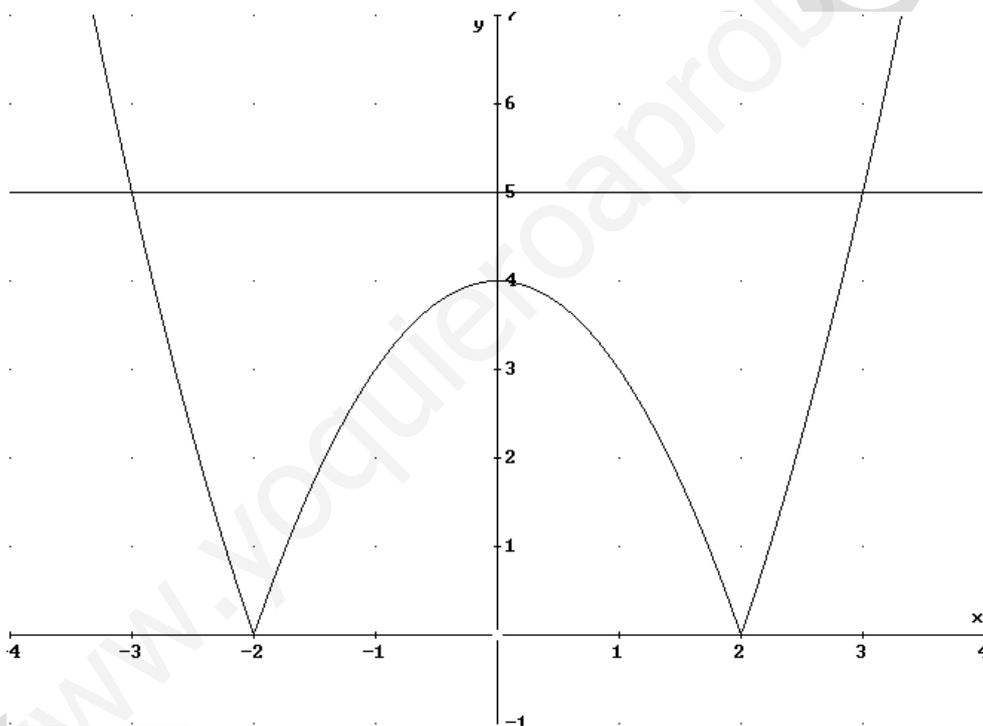
a) Haz un esbozo de la gráfica de f .

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, y hacemos el dibujo



b) Vemos por el dibujo que es simétrica respecto el eje OY, luego:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left[\int_0^2 (5 + x^2 - 4) dx + \int_2^3 (5 - x^2 + 4) dx \right] = 2 \left[\int_0^2 (1 + x^2) dx + \int_2^3 (9 - x^2) dx \right] = \\
 &= 2 \left(\left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 \right) = 2 \left(\left[2 + \frac{8}{3} \right] + \left[27 - \frac{27}{3} \right] - \left[18 - \frac{8}{3} \right] \right) = \frac{44}{3} u^2
 \end{aligned}$$