PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2021

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
- Julio, Ejercicio 4

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x^3-x^4$
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Esboza la gráfica de *f* y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=12x^2-4x^3=0\Rightarrow x^2(12-4x)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=3$$

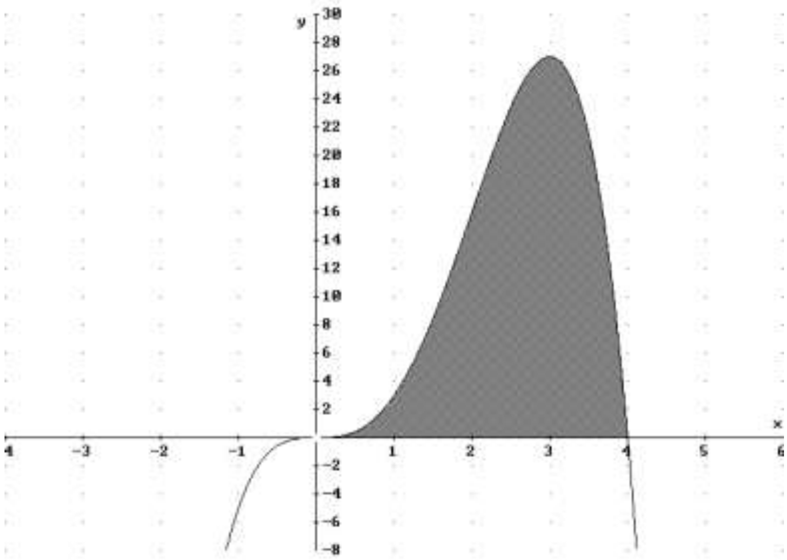
	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	—
Función	C	C	D

La función es creciente en $(-\infty,0)\cup(0,3)$. Decreciente en $(3,\infty)$.
Tiene un máximo relativo en $(3,27)$

b) Calculamos lo punto de corte con los ejes

Corte con el eje X $\Rightarrow y=0\Rightarrow 4x^3-x^4=0\Rightarrow x^3(4-x)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=4\Rightarrow(0,0)\quad y\quad(4,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$



El área de la región pedida es:

$$A=\int_0^4(4x^3-x^4)\,dx=\left[x^4-\frac{x^5}{5}\right]_0^4=\left(256-\frac{1024}{5}\right)-\left(0\right)=\frac{256}{5}\ u^2$$

Considera la función $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por: $F(x)=\int_0^x (2t+\sqrt{t})\ dt$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2021. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

La ecuación de la recta tangente es: $y-F(1)=F'(1)\cdot(x-1)$

Calculamos:

$$F(x)=\int_0^x (2t+\sqrt{t})\,dt=\left[t^2+\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^x=x^2+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Rightarrow F(1)=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$F'(x)=2x+\sqrt{x}\Rightarrow F'(1)=2+1=3$$

Luego, sustituyendo, tenemos que:

$$y-\frac{5}{3}=3\cdot(x-1)\Rightarrow y=3x-\frac{4}{3}$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{x}$

a) Calcula *a* para que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente a la misma en el punto $(1, f(1))$ y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=a$ es $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$

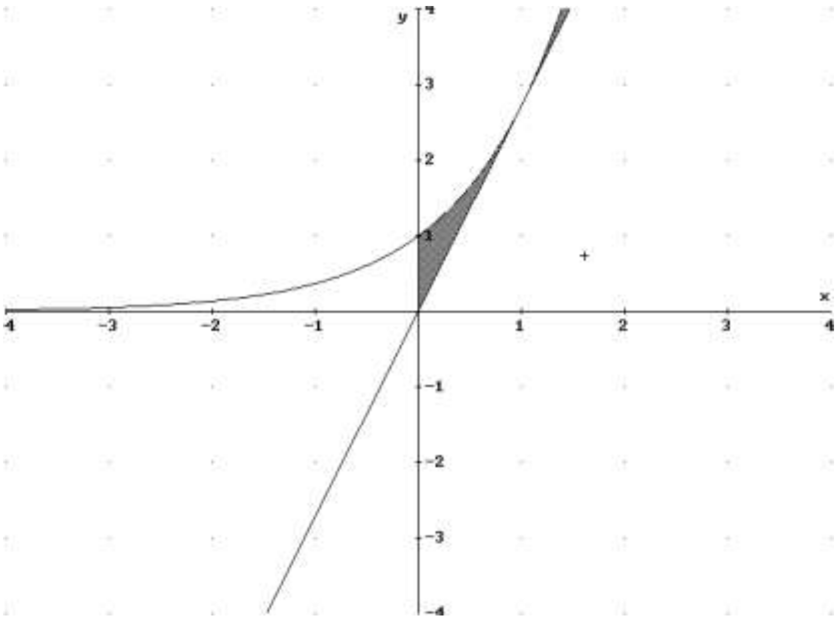
$$f(a)=e^{a}$$
$$f'(x)=e^{x}\Rightarrow f'(a)=e^{a}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-e^{a}=e^{a}\cdot(x-a)$

Como pasa por el origen de coordenadas, tenemos que:

$$0-e^{a}=e^{a}\cdot(0-a)\Rightarrow -e^{a}=-a\cdot e^{a}\Rightarrow a=\frac{-e^{a}}{-e^{a}}=1$$

b) La recta tangente es: $y-e=e\cdot(x-1)\Rightarrow y=e\cdot x$



Calculamos el área

$$\int_0^1 (e^{x}-e\cdot x)\,dx=\left[e^{x}-e\frac{x^{2}}{2}\right]_0^1=\left(e-\frac{1}{2}e\right)-(1-0)=\frac{e}{2}-1=0'359\ u^{2}$$

Calcula $\displaystyle\int_1^3 \left| x^2 - 3x + 2 \right| dx$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 1. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Abrimos la función: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1\ ;\ x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si \quad x < 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & si \quad 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 3x + 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\int_1^3 \left| x^2 - 3x + 2 \right| dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^3 =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 3\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} - 2\cdot 1 \right) + \left(\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} + 2\cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + 2\cdot x \right) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 + 9 - \frac{27}{2} + 6 - \frac{8}{3} + 6 - 4 = 1$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+|x-1|$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
c) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x)=x^2+|x-1|=\begin{cases} x^2-x+1 & si \quad x<1 \\ x^2+x-1 & si \quad x\geq 1\end{cases}$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x<1 \\ 2x+1 & si \quad x>1\end{cases}$

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \text{ No sirve, porque no está en su dominio}$$

	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$(1,\infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$+$
Función	D	C	C

La función es creciente en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

Tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

b) Calculamos la integral que nos piden.

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx+\int_1^2 (x^2+x-1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=$$
$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-0+\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{11}{3}$$

Considera la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\cdot e^x$

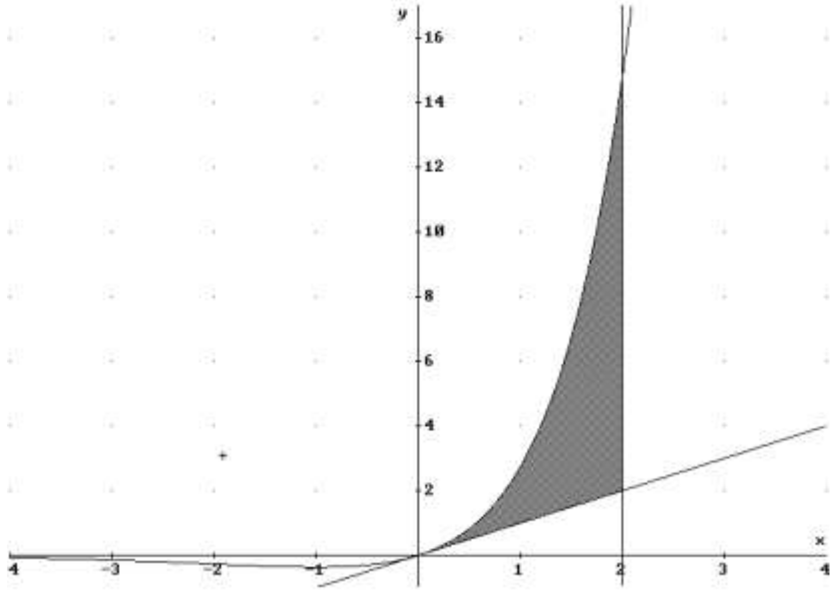
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y las rectas $x=2$, $y=x$

b) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 2. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Hacemos por partes la integral

$$\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C + C$$

$u=x$; $du=dx$

$dv=e^x dx$; $v=e^x$

Calculamos el área que nos piden:

$$A=\int_0^2 (x\cdot e^x - x)\,dx = \left[x\cdot e^x - e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(2\cdot e^2 - e^2 - \frac{4}{2}\right) - \left(0 - e^0 - 0\right) = e^2 - 1\,u^2$$

Considera la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\left(\ln(x)\right)^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan.
c) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función *f* y las rectas $y=0$; $x=1$; $x=e$
MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

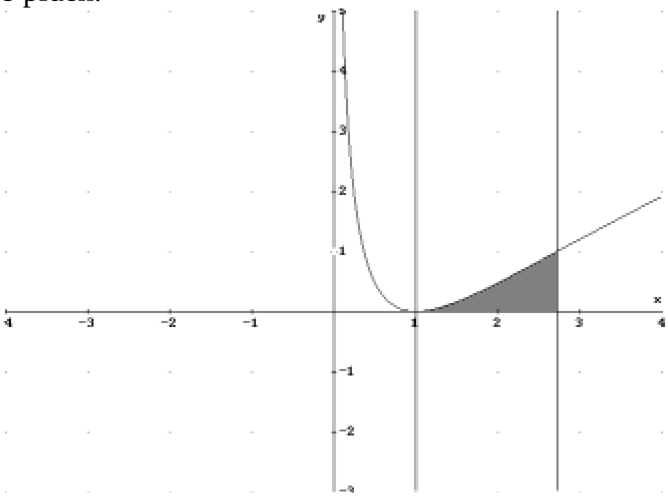
a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}=0\Rightarrow 2\ln x=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=e^0=1$$

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	$-$	$+$
Función	D	C

La función es creciente en $(1,+\infty)$ y decreciente en $(0,1)$. Tiene un mínimo en $(1,0)$

b) Calculamos el área que nos piden.



$$\int(\ln x)^2\ dx=x(\ln x)^2-2\int \ln x\ dx=x(\ln x)^2-2\left(x\ln x-\int dx\right)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

$u=(\ln x)^2$; $du=\dfrac{2\ln x}{x}\ dx$
$dv=dx$; $v=x$

$u=\ln x$; $du=\dfrac{1}{x}\ dx$
$dv=dx$; $v=x$

$$A=\int_1^e(\ln x)^2\,dx=\left[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\right]_1^e=(e-2e+2e)-(0-0+2)=e-2\ u^2$$

Calcula $\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$**. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable** $t=\sqrt{e^x}$**).**

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 3. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{e^x}=t \Rightarrow e^x=t^2$$
$$e^x dx = 2t\ dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=e \end{array}$

Con lo cual:

$$I=\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx=\int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{2t\,dt}{t^2}=2\int_1^e \left(\frac{1}{t(1+t)}\right)dt$$

Descomponemos la integral racional

$$\frac{1}{t\cdot(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}=\frac{A\cdot(1+t)+B\cdot t}{t\cdot(1+t)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo, luego:

$$t=0 \Rightarrow 1=A$$
$$t=-1 \Rightarrow 1=-B \Rightarrow B=-1$$

$$I=2\int_1^e \left(\frac{1}{t(1+t)}\right)dt=2\int_1^e \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left[\ln t-\ln(t+1)\right]_1^e=2\left[\left(\ln e-\ln(e+1)\right)-\left(\ln 1-\ln 2\right)\right]=$$
$$=2-2\ln(e+1)+2\ln 2$$

Calcula $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2sen^{2}(x)-\cos^{2}(x)\right)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Sabemos que: $sen^{2}x+\cos^{2}x=1$ y que $sen^{2}x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2sen^{2}(x)-\cos^{2}(x)\right) dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2sen^{2}(x)-1+sen^{2}(x)\right) dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(3sen^{2}(x)-1\right) dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-1\right) dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{3\cos 2x}{2}\right) dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{3sen\,2x}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-\left(0-0\right)=\frac{\pi}{4}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x| - 2$ y $g(x) = 4 - x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan.

b) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2021. RESERVA 4. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

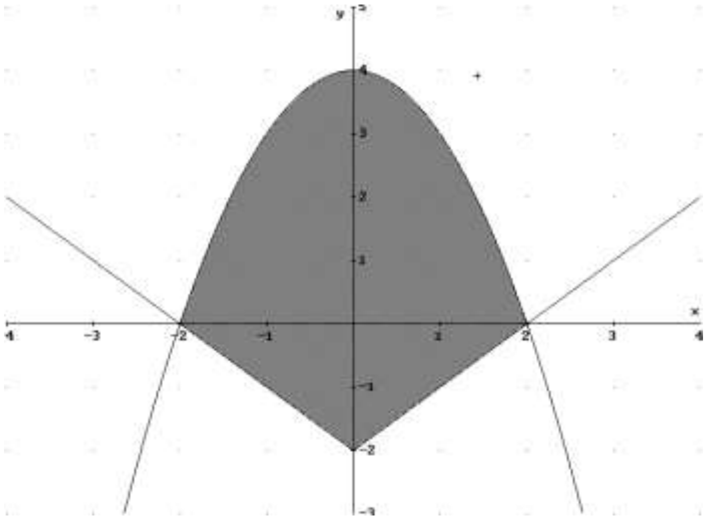
a) La función $f(x) = |x| - 2 = \begin{cases} x - 2 & si \quad x \geq 0 \\ -x - 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos semirectas que pasan por el punto $(0, -2)$.

La función $g(x) = 4 - x^2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0, 4)$ y corta al eje X en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Calculamos los puntos de corte:

Si $x < 0 \Rightarrow -x - 2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \\ x = 3 \Rightarrow \textit{No válida} \end{cases}$

Si $x > 0 \Rightarrow x - 2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow (2, 0) \\ x = -3 \Rightarrow \textit{No válida} \end{cases}$



b) Calculamos el área del recinto

$$A = 2 \cdot \int_0^2 \left[(4 - x^2) - (x - 2) \right] dx = 2 \cdot \int_0^2 (-x^2 - x + 6)\, dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) = \frac{44}{3} \ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1+\int_0^x t\cdot e^t\,dt$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan.
MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I=\int t\cdot e^t\,dt$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=t;\ du=dt \\ dv=e^t\,dt;\ v=e^t \end{array}}$$

$$I=\int t\cdot e^t\,dt=t\cdot e^t-\int e^t\,dt=t\cdot e^t-e^t+C$$

La función que nos dan es:

$$f(x)=1+\int_0^x t\cdot e^t\,dt=1+\left[t\cdot e^t-e^t\right]_0^x=1+\left(x\cdot e^x-e^x\right)-\left(0-e^0\right)=x\cdot e^x-e^x+2$$

Calculamos la primera y segunda derivada

$$f'(x)=e^x+x\cdot e^x-e^x=x\cdot e^x$$

$$f''(x)=x\cdot e^x+e^x=e^x(x+1)=0\Rightarrow x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
Función	Cn	Cx

Luego, la función es cóncava en $(-\infty,-1)$ y convexa en $(-1,+\infty)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(-1,2-\dfrac{2}{e}\right)$.

Considera la función *f* definida $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x\neq -1$, $x\neq 1$. Halla una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto $(2,4)$.
MATEMÁTICAS II. 2021. JULIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx=\int 1dx+\int \frac{2}{x^2-1}dx=x+\int \frac{2}{x^2-1}dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-1=0\Rightarrow x=1$; $x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$x=1\Rightarrow 2=2A\Rightarrow A=1$
$x=-1\Rightarrow 2=-2B\Rightarrow B=-1$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx=x+\int \frac{1}{(x-1)}dx+\int \frac{-1}{(x+1)}dx=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$$

Como tiene que pasar por el punto $(2,4)$

$$4=2+\ln|1|-\ln|3|+C\Rightarrow C=2+\ln 3$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+2+\ln 3$