

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = (x + 3) \cdot e^{-x}$ .

a) Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

b) Determina los extremos relativos de  $f$  y los puntos de inflexión de su gráfica.

c) Esboza la gráfica de  $f$ .

**MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: No tiene.

Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ .

Asíntota oblicua: No tiene

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:  $y' = \frac{1 \cdot e^x - e^x(x+3)}{(e^x)^2} = \frac{-x-2}{e^x} = 0 \Rightarrow x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $y'$	+	-
Función	C	D

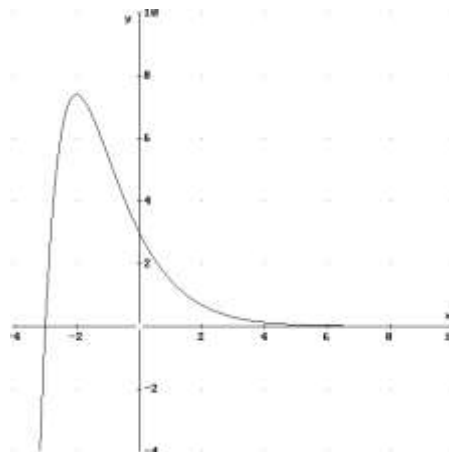
↓  
Máximo  $(-2, e^2)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:  $y'' = \frac{-1 \cdot e^x - e^x(-x-2)}{(e^x)^2} = \frac{x+1}{e^x} = 0 \Rightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo $y''$	-	+
Función	Cn	Cx

↓  
P.I.  $(-1, 2e)$

c)



De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva  $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$  ( $x > 1$ ), uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y el otro sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) La función que queremos que sea mínimo es:  $Superficie_{\min} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables:  $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$Superficie_{\min} = x \cdot \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

Luego, las dimensiones son:  $x = \sqrt{3}$ ;  $y = 3$

Dada la función  $f$  definida para  $x \neq -1$  por  $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

b) Halla los puntos de corte, si existen, de dicha gráfica con sus asíntotas.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical:  $x = -1$ .

Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2} = \infty \Rightarrow$  No tiene.

Asíntota oblicua:  $y = x - 2$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} \right] = -2$$

b) Calculamos el punto de corte de la asíntota oblicua con la función.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} \\ y = x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 \Rightarrow \left( -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3} \right)$$

Se sabe que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tiene un punto de derivada nula en  $x = 1$  que no es extremo relativo y que  $f(1) = 1$ . Calcula  $a, b$ , y  $c$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Si no es extremo relativo, será un punto de inflexión, luego:  $f''(1) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -3 ; b = 3 ; c = 0$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función continua definida por  $f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$  donde  $a$  es un

número real.

a) Determina  $a$ .

b) Halla la función derivada de  $f$ .

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

## RESOLUCIÓN

Lo primero que hacemos es abrir la función

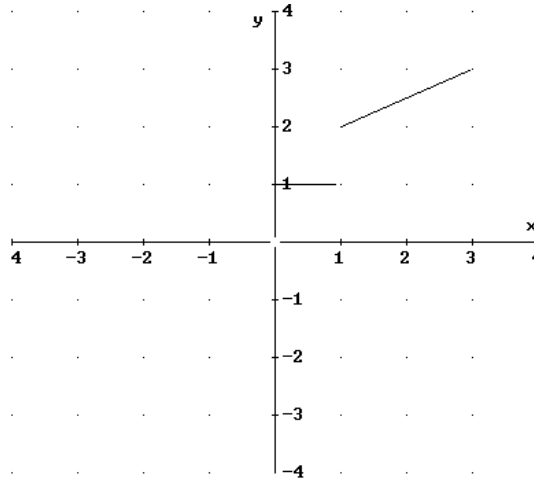
$$f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases} = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \leq x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en  $x = a$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^-} x - 2 = a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} x^2 - 5x + 7 = a^2 - 5a + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow a - 2 = a^2 - 5a + 7 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$$

b) Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

En la figura adjunta puedes ver representada parte de la gráfica de una función  $f$  que está definida en el intervalo  $(-3,3)$  y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.



a) Razona cuál debe ser el valor de  $f(0)$ .

b) Completa la gráfica de  $f$ .

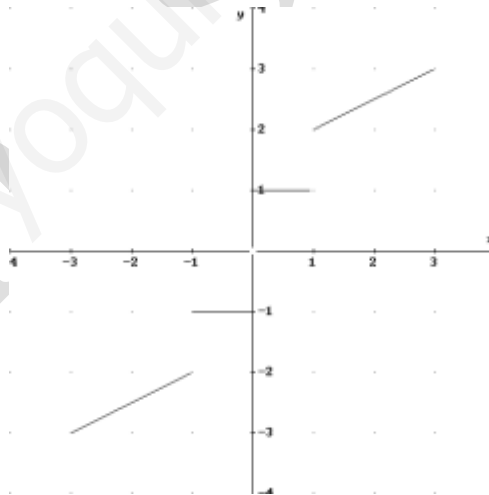
c) Halla  $f'(x)$  para los  $x \in (-3,3)$  en los que dicha derivada exista.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) La única posibilidad para que la función sea simétrica respecto al origen de coordenadas es que  $f(0) = 0$ .

b)



c) Como la función no es continua en  $x = -1$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$ , tampoco es derivable en dichos puntos.

La función derivada será:  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -3 < x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$

Se sabe que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  es tal que  $f(0) = 4$  y que su gráfica tiene un punto de inflexión en  $(1, 2)$ . Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$  es horizontal, calcula  $a, b, c$  y  $d$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d ; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c ; f''(x) = 6ax + 2b$$

A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 4 \Rightarrow d = 4 \\ f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + d = 2 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1 ; b = -3 ; c = 0 ; d = 4$$



Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Calcula, si es posible, las derivadas laterales de  $f$  en  $x = 1$ .  
 b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en  $x = 1$ .

$$\begin{array}{l}
 1) f(1) = 4 \\
 2) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 - x^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \Rightarrow \text{No es continua.}
 \end{array}$$

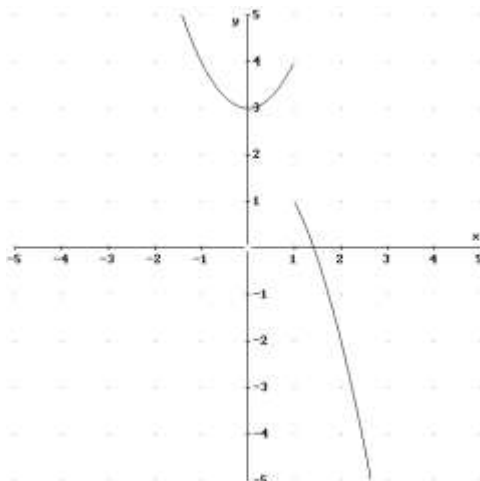
Como  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \Rightarrow$  La función es continua en  $x = 1^-$ .

Como  $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \Rightarrow$  La función no es continua en  $x = 1^+$  y, por lo tanto, no puede ser derivable en  $x = 1^+$ .

La derivada a la izquierda de  $x = 1$  es  $f'(1^-) = 2$ . La función derivada es:  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ -2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) Igualamos a cero la primera derivada:  $y' = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $y'$	-	+	
Función	D	C	D



Considera la función  $f$  definida para  $x \neq -2$  por  $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

b) Estudia la posición relativa de la gráfica de  $f$  respecto de sus asíntotas.

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical es  $x = -2$ .

Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{1} = \infty \Rightarrow$  No tiene.

Asíntota oblicua:  $y = 2x - 4$

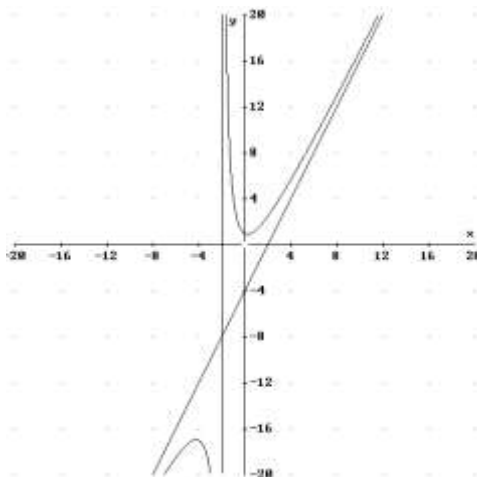
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + 2}{x + 2} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 - 4x}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{-4x + 2}{x + 2} \right] = -4$$

b) Calculamos la posición de la gráfica respecto de las asíntotas:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + 2}{x + 2} - (2x - 4) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 + 4x - 4x + 8}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{10}{x + 2} \right] = 0^+$  luego,  $f(x)$  está por encima de la asíntota oblicua.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2x^2 + 2}{x + 2} - (2x - 4) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 + 4x - 4x + 8}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{10}{x + 2} \right] = 0^-$  luego,  $f(x)$  está por debajo de la asíntota oblicua.



Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2}$$

Estudia la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

**MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es abrir la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

A continuación vamos a estudiar la continuidad en  $x=0$ ;  $x=1$  y  $x=-1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \text{No continua en } x=1 \text{ y, por lo tanto, no derivable.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1+x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Rightarrow \text{No continua en } x=-1 \text{ y, por lo tanto, no derivable.}$$

Vamos a estudiar ahora si es derivable en  $x=0$ .  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Si es derivable.}$$

Luego, la función es derivable en  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .