EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

**PROBLEMAS RESUELTOS**
**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**
**2009**

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

**Calcula $\lim_{x \to 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$ siendo ln la función logaritmo neperiano.**

**MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 - 2\ln x}{(x^2 - 1) \cdot \ln x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2\frac{1}{x}}{2x \cdot \ln x + (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2 + \frac{2}{x^2}}{2\ln x + \frac{2x}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{x^2 - 1}{x^2}} = \frac{2 + 2}{0 + 2 + 2 - 0} = 1$$

**Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & si\ \ x<0\\ x^2-3x-1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$**

**a) Estudia su continuidad y derivabilidad.**
**b) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.**
**c) Esboza la gráfica de *f*.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{1}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$, luego, lo es para $x<0$. La función $x^2-3x-1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, luego, lo es para $x\geq 0$. Vamos a estudiar, por tanto, la continuidad y derivabilidad en $x=0$.

1) $f(0)=-1$

2) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}x^2-3x-1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-1$$

3) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$

La función es continua en $x=0$.

La función derivada es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2} & si\ \ x<0\\ 2x-3 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=-1\\ f'(0^+)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

b) La función $\dfrac{1}{x-1}$ no tiene asíntota vertical para $x<0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow y=0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

La función $x^2-3x-1$ como es polinómica, no tiene asíntotas.

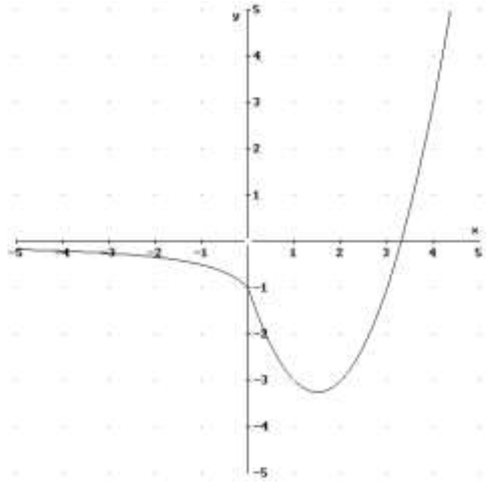
Igualamos la derivada a cero para calcular los máximos y mínimos.

$\dfrac{-1}{(x-1)^2}=0\Rightarrow$ No tiene solución. $\quad 2x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

| | $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ | $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ |
|---|---|---|
| Signo $y'$ | – | + |
| Función | D | C |

Luego, tiene un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{13}{4}\right)$

c) Hacemos un esbozo de la función.



**Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula los valores de *a, b, c* y *d* sabiendo que *f* verifica:**

**- El punto (0,1) es un punto de inflexión de la gráfica de *f*.**

**- *f* tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1$.**

**- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ tiene de pendiente 1.**

**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

- El punto (0,1) es un punto de inflexión de la gráfica de *f*

$$\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (0,1)\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=1 \\ f''(0)=0\Rightarrow 6a\cdot 0+2b=0 \end{cases}$$

- *f* tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=0$.

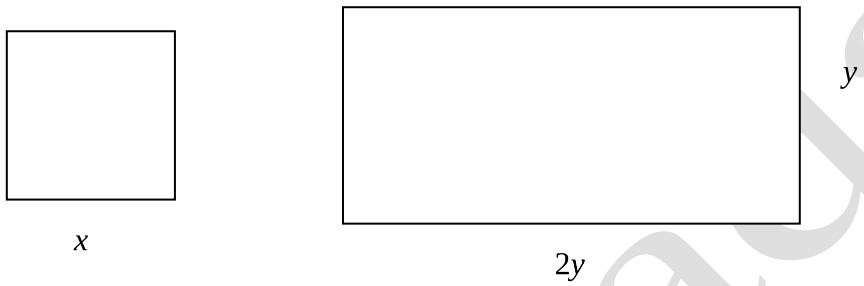
- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ tiene de pendiente 1

$$\Rightarrow f'(2)=1\Rightarrow 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c=1$$

Resolviendo el sistema resulta: $a=\dfrac{1}{9}$ ; $b=0$ ; $c=-\dfrac{1}{3}$ ; $d=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x+1$

**Se divide el segmento de longitud $L=20$ cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N




a) Función que queremos que sea mínimo: $S_{\min} = x^2 + 2y^2$

b) Relación entre las variables: $4x + 6y = 20 \Rightarrow x = \dfrac{10-3y}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable:

$$S_{\min} = x^2 + 2y^2 = \left(\frac{10-3y}{2}\right)^2 + 2y^2 = \frac{17y^2 - 60y + 100}{4}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = \frac{34y-60}{4} = 0 \Rightarrow y = \frac{60}{34} = \frac{30}{17}$$

e) Calculamos la 2ª derivada: $S''_{\min} = \dfrac{34}{4} > 0 \Rightarrow$ mínimo

Luego, el cuadrado tiene de lado $x = \dfrac{10 - 3\cdot\dfrac{30}{17}}{2} = \dfrac{40}{17}$ cm y el rectángulo tiene de altura $\dfrac{30}{17}$ cm y de base $\dfrac{60}{17}$ cm.

**Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2|x-3|$.**
**a) Estudia la continuidad y derivabilidad de *f*.**
**b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f*. Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**
**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función: $f(x)=x^2|x-3|=\begin{cases}-x^3+3x^2 & si \quad x<3\\ x^3-3x^2 & si \quad x\geq 3\end{cases}$

La función es continua en $x=3$. Vamos a estudiar si es derivable en $x=3$.

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+6x & si \quad x<3\\ 3x^2-6x & si \quad x>3\end{cases}\Rightarrow f'(3^-)=-9\neq f'(-3^+)=9\Rightarrow \text{No derivable en } x=3.$$

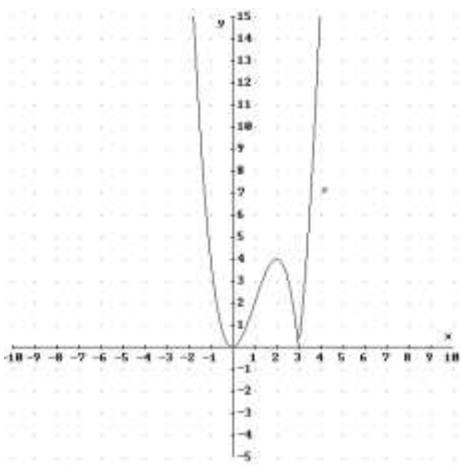
Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{3\}$.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+6x & si \quad x<3\\ 3x^2-6x & si \quad x>3\end{cases}\Rightarrow f'=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

| | $(-\infty,0)$ | $(0,2)$ | $(2,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo $f'$ | – | + | – | + |
| Función | D | C | D | C |

↓ mínimo (0,0) ↓ Máximo (2,4) ↓ Pico(3,0)



**Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(Ln\,x)^2}{(x-1)^2} & si \quad x\neq 1\\ a & si \quad x=1\end{cases}$**

**a) Sabiendo que *f* es continua, calcula *a*.**
**b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\infty}\frac{1\cdot(\ln x)^2+2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x}{2\cdot(x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Como es continua se cumple que $f(1)=a=\lim_{x\to 1}f(x)=1\Rightarrow a=1$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1\cdot(\ln x)^2+2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x}{2\cdot(x-1)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x+1)}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Luego, la recta $y=0$ es la asíntota horizontal.

**Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 1 & si \quad x \le 1 \\ ax^2 - 5x + 2a & si \quad x > 1 \end{cases}$.**

**Es derivable. Determina los valores de *a* y *b*.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x = 1$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} -x^2 + bx + 1 = b \\ \lim_{x \to 1^+} ax^2 - 5x + 2a = 3a - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 3a - 5$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2x + b & si \quad x \le 1 \\ 2ax - 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Como es derivable en $x = 1$, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -2 + b \\ f'(1^+) = 2a - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + b = 2a - 5 \Rightarrow b = 2a - 3$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} b = 3a - 5 \\ b = 2a - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2 \ ; \ b = 1$$

**Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

**tiene extremos relativos en (0,0) y en (2,2). Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \; ; \; f''(x) = 6ax + 2b$$

- Extremo relativo en (0,0) $\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (0,0) \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \end{cases}$

- Extremo relativo en (2,2) $\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (2,2) \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 2 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema resulta: $a = -\frac{1}{2}$ ; $b = \frac{3}{2}$ ; $c = 0$ ; $d = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

**Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x+e^{-x}$.**
**a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, así como los extremos relativos o locales de *f*.**
**b) Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.**
**c) Esboza la gráfica de *f*.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=1-e^{-x}=0\Rightarrow 1-\frac{1}{e^x}=0\ ;\ e^x-1=0\Rightarrow x=0$$

| | $(-\infty,0)$ | $(0,\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $f'$ | – | + |
| Función | D | C |

$\downarrow$
mínimo (0,1)

b) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}$.

Asíntotas Verticales: No tiene

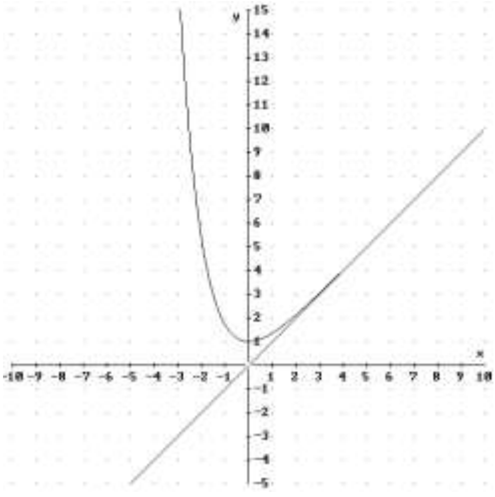
Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{e^x}\right)=\infty\Rightarrow$ No tiene; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{e^x}\right)=\infty\Rightarrow$ No tiene

Asíntota oblicua: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=1\quad ;\quad n=\lim_{x\to\infty}\left[x+e^{-x}-x\right]=\lim_{x\to\infty}(e^{-x})=0$$

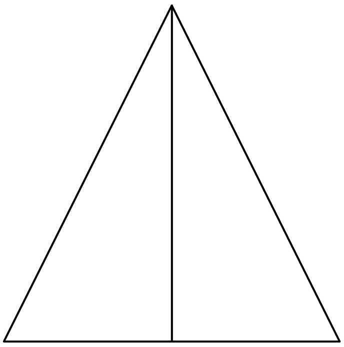
Luego, la asíntota oblicua es $y=x$

c)



**De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm ¿qué base tiene el de área máxima?.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{max} = \frac{b \cdot h}{2}$

b) Relación entre las variables: $b + h = 20 \Rightarrow b = 20 - h$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable:

$$S_{max} = \frac{(20-h) \cdot h}{2} = \frac{20h - h^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{max} = \frac{20-2h}{2} = 0 \Rightarrow h = 10$$

e) Calculamos la 2ª derivada: $S''_{max} = -1 < 0$ máximo

Luego, la base mide 10 cm

**Se considera la función $f:[1,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$.**
**Determina la asíntota de la gráfica de *f*.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1=2$$

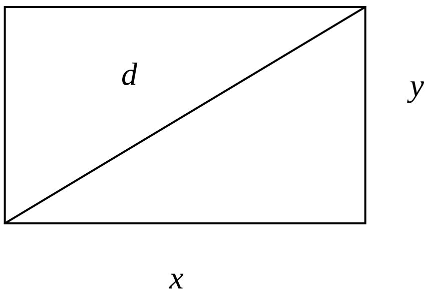
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Luego, la asíntota oblicua es : $y=2x-\frac{1}{2}$

**De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm$^2$, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.**
**MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N




a) Función que queremos que sea mínimo: $d_{\min} = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Relación entre las variables: $x \cdot y = 16 \Rightarrow y = \dfrac{16}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$d_{\min} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}}$$

d) Derivamos e igualamos a cero:

$$d'_{\min} = \frac{2x^4 - 512}{2x^3\sqrt{\dfrac{x^4+256}{x^2}}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

Luego, es un cuadrado de lado $x = 4\,cm$ ; $y = 4\,cm$