

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \cdot (x - 2)$.

a) Calcula las asíntotas de f .

b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y los valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

c) Determina, si existen, los puntos de inflexión de f .

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: No tiene, ya que el dominio de la función es \mathbb{R} .

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x(x-2) = \infty \Rightarrow$ No tiene.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x-2) = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = e^x + (x-2)e^x = e^x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Signo f'	-	+
Función	D	C

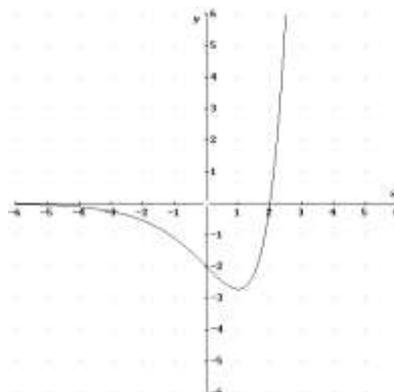
↓
mínimo $(1, -e)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo f''	-	+
Función	Cn	Cx

↓
P.I. $(0, -2)$

El dibujo de la función sería:



Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen} x - x \cdot e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen} x - x \cdot e^x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \cos x - e^x - x \cdot e^x}{2x} = \frac{a-1}{0}$$

Como el límite es finito, se tiene que cumplir que: $a-1=0 \Rightarrow a=1$, para que vuelva a salir $\frac{0}{0}$ y podamos seguir aplicando L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \operatorname{sen} x - x \cdot e^x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos x - e^x - x \cdot e^x}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x - e^x - e^x - x \cdot e^x}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Los extremos absolutos pueden estar en:

- Las soluciones de $f'(x) = 0$. Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$$

- En los puntos donde no es continua o no es derivable. En nuestro caso como es continua y derivable, no hay ningún punto.

- En los extremos del intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$. Calculamos los valores de la función en los extremos del intervalo.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e - 1 \quad ; \quad f(e) = \frac{1}{e} + 1$$

Luego, el máximo absoluto está en $\left(\frac{1}{e}, e - 1\right)$ y el mínimo absoluto en $(1, 1)$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = e$ es:

$$y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e)$$

Calculamos: $f(e) = \frac{1}{e} + \ln e = \frac{1}{e} + 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e^2}$$

Sustituyendo, tenemos: $y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e) \Rightarrow y - \frac{1}{e} - 1 = \frac{e-1}{e^2} (x - e)$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 2$

- a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f
 c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

- a) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x = -1$ y $x = 2$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

- b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (x^2 - x - 2) - (2x - 1) \cdot 2x^2}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-2x^2 - 8x}{(x^2 - x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0; x = -4$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f'	-	+	+	-	-
Función	D	C	C	D	D

Creciente: $(-4, -1) \cup (-1, 0)$

Decreciente: $(-\infty, -4) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

- c) Calculamos si existe punto de corte de la función con la asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2x^2}{x^2 - x - 2} \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x^2}{x^2 - x - 2} = 2 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Luego, el punto de corte es el $(-2, 2)$

Sea la función $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

- a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 c) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = 2x - \frac{8}{x} = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -2$$

	(1, 2)	(2, e)
Signo y'	-	+
Función	D	C

↓
mínimo (2, $4 - 8\ln 2$)

La función tiene un mínimo relativo en (2, $-1'54$).

Los extremos absolutos pueden estar en los extremos del intervalo, es decir, en $x=1$ y $x=e$.
 Calculamos los valores de la función en estos puntos.

$$f(1) = 1$$

$$f(e) = e^2 - 8\ln e = -0'61$$

Luego, el máximo absoluto está en el punto (1, 1) y el mínimo absoluto en el punto (2, $-1'54$)

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$y'' = 2 + \frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

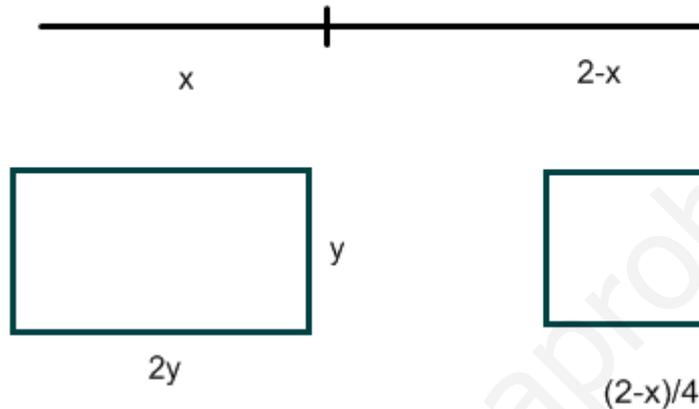
	(1, e)
Signo y''	+
Función	Cx

Luego, la función es convexa en el intervalo (1, e).

Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de la altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultante sea mínima.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = \left(\frac{2-x}{4}\right)^2 + 2y^2$

b) Relación entre las variables: $x = 2y + 2y + y + y = 6y \Rightarrow y = \frac{x}{6}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable.

$$S_{\min} = \left(\frac{2-x}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{17x^2 - 36x + 36}{144}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{34x - 36}{144} = 0 \Rightarrow x = \frac{36}{34} = \frac{18}{17}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$S'' = \frac{36}{144} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = \frac{18}{17}m$; $2-x = \frac{16}{17}m$

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{-x^2-x}{x^2+3x+3} = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo y'	-	+	-
Función	D	C	D

\downarrow \downarrow
 mínimo $(-1, 1)$ Máximo $(0, \ln 3)$

b) La recta normal en $x = -2$ es $y - f(-2) = -\frac{1}{f'(-2)} \cdot (x + 2)$

$$f(-2) = 2$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x}{x^2 + 3x + 3} \Rightarrow f'(-2) = \frac{-4 + 2}{4 - 6 + 3} = -2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x + 2) \Rightarrow y = \frac{x + 6}{2}$

Se considera la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable, primero tiene que ser continua en el punto $x=1$, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \frac{a}{x-2} = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} a + \frac{b}{\sqrt{x}} = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{(x-2)^2} & \text{si } x < 1 \\ -\frac{b}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

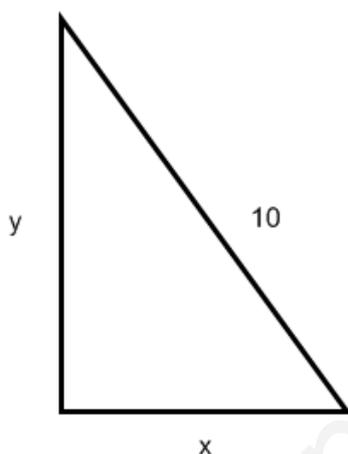
Como es derivable en $x=1$, se cumple que: $\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -\frac{a}{1} = -a \\ f'(1^+) = -\frac{b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow -a = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = 2a$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{1}{2}$

De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = \frac{x \cdot y}{2}$

b) Relación entre las variables: $x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \sqrt{100 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{100x^2 - x^4}}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{50}$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S'' = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2} = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2}$$

$$S''(x = \sqrt{50}) = \frac{-2\sqrt{50}\sqrt{100 - 50} + \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{100 - 50}}}{100 - 50} = \frac{-100 + 1}{50} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = \sqrt{50}$; $y = \sqrt{50}$

Sea la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Calcula el valor de k .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua se cumple que los límites laterales en $x=0$ son iguales, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x+k = k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow k=1$$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$$

Calculamos: $f(1) = \frac{e^1-1}{1} = e-1$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2} \cdot x^2 - 2x \cdot (e^{x^2}-1)}{x^4} = \frac{2 \cdot e^{x^2} \cdot x^2 - 2 \cdot (e^{x^2}-1)}{x^3} \Rightarrow f'(1) = 2e - 2e + 2 = 2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \Rightarrow y - (e-1) = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + e - 1 = 2x + e - 3$$

Sea la función f definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f .

b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y los valores que alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x=1$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{0}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 \cdot e^{-x}}{-1} = \infty \Rightarrow \text{NO}$$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot e^{-x}(1-x) - (-1) \cdot e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{x \cdot e^{-x}}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow x=0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo f'	-	+	+
Función	D	C	C

Creciente: $(0, 1) \cup (1, \infty)$

Decreciente: $(-\infty, 0)$

Mínimo: $(0, 1)$