EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2019

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$ para $x\neq -1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Asíntotas Verticales: La recta $x=-1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to -1} f(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{2}{0}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{2}{0}=+\infty$$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x+3}{2}=\dfrac{\infty}{2}=\infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y=\dfrac{1}{2}x+1$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x+8-2x^2-2x}{2\cdot(2x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{4x+4}=\frac{\infty}{\infty}=1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=0\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

	$\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$	$\left(-1-\sqrt{2},-1\right)$	$\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$	$\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	−	−	+
Función	C	D	D	C

Creciente: $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$

Decreciente: $\left(-1-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$

Máximo: $\left(-1-\sqrt{2},-0'91\right)$

Mínimo: $\left(-1+\sqrt{2},1'91\right)$

EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)\cdot e^x$.
a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.
b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada:

$$f'(x)=e^x+(x-a)e^x=e^x(x-a+1)$$

Como hay un punto crítico en $x=0\Rightarrow f'(0)=0$, luego:

$$f'(0)=0\Rightarrow e^0(0-a+1)=0\Rightarrow a=1$$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=e^x\cdot x\Rightarrow f''(x)=e^x\cdot x+e^x=e^x\cdot(x+1)=0\Rightarrow x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
Signo f''	—	+
Función	Cn	Cx

Luego, el punto de inflexión es: $\left(-1,-\dfrac{2}{e}\right)$

Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-e^{-2x}-2x}{sen^2(x)}$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Resolvemos la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-2x}-2x}{sen^2(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)+2e^{-2x}-2}{2sen(x)\cdot\cos(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)-4e^{-2x}}{2\cdot\cos^2(x)-2sen^2(x)}=\frac{-1-4}{2}=\frac{-5}{2}$$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por: $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2b & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula *a* y *b*
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x=0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2-ax+2b=2b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow 2b=1\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x-a & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\frac{1}{x+1}\cdot x-1\cdot\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Calculamos la derivada por la izquierda y por la derecha en el punto 0

$f'(0^-)=-a$

$$f'(0^+)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-(x+1)}{2x\cdot(x+1)^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2x\cdot(x+1)^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\cdot(x+1)^2}=-\frac{1}{2}$$

Como es derivable en $x=0$, se cumple que: $f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow -a=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Se considera la función $f:(-2\pi,2\pi)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{2+\cos(x)}$

a) Calcula sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Halla sus máximos y mínimos relativos (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{-sen\,x\cdot(2+\cos x)-(-sen\,x)\cdot\cos x}{(2+\cos x)^2}=\frac{-2sen\,x}{(2+\cos x)^2}\Rightarrow x=-\pi\ ;\ x=0\ ;\ x=\pi$$

	$(-2\pi,-\pi)$	$(-\pi,0)$	$(0,\pi)$	$(\pi,2\pi)$
Signo f'	$-$	$+$	$-$	$+$
Función	D	C	D	C

La función es creciente en: $(-\pi,0)\cup(\pi,2\pi)$ y decreciente en: $(-2\pi,-\pi)\cup(0,\pi)$

b) Máximo en $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ y mínimo en $(-\pi,-1)$ y $(\pi,-1)$.

Se sabe que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de inflexión para $x=1$ y que la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto es $y=-6x+6$. Calcula *a, b* y *c*.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=6x^2+2ax+b\ ;\ f''(x)=12x+2a$$

- Punto de inflexión en $x=1\Rightarrow f''(1)=0\Rightarrow 12\cdot 1+2a=0\Rightarrow a=-6$

- La pendiente de la recta tangente en $x=1$ es -6, luego:

$$f'(1)=-6\Rightarrow 6\cdot 1^2+2\cdot(-6)\cdot 1+b=-6\Rightarrow b=0$$

- Si $x=1\Rightarrow y=-6\cdot 1+6=0$. Luego, la función pasa por el punto $(1,0)$. Por lo tanto:

$$f(1)=0\Rightarrow 2\cdot 1^3+(-6)\cdot 1^2+0\cdot 1+c=0\Rightarrow c=4$$

Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t)=t\,e^{-\frac{t}{2}}\ mg/ml$, siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.
a) Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.
b) Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que los extremos absolutos pueden estar en:

- **Los extremos del intervalo**.
Calculamos $C(0)=0\cdot e^{0}=0$
Calculamos $C(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} t\cdot e^{-\frac{t}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t}{e^{\frac{t}{2}}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{\frac{t}{2}}}=\dfrac{2}{\infty}=0$

- **En los puntos donde se anula la derivada**. Calculamos crecimiento y decrecimiento de la función

$$C'(t)=1\cdot e^{-\frac{t}{2}}+t\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)=e^{-\frac{t}{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)=0\Rightarrow 1-\frac{t}{2}=0\Rightarrow t=2$$

	(0,2)	(2,∞)
Signo $C'(t)$	+	−
Función	C	D

Luego, $t=2$, tiene un máximo relativo que vale: $C(2)=2\cdot e^{-1}=\dfrac{2}{e}=0'735$

- **En los puntos donde no es continua o derivable**. En este caso la función es continua y derivable.

Por lo tanto, el máximo absoluto está en $t=2$ y vale 0’735

b) No hay riesgo para el paciente, ya que hemos visto que el máximo de concentración que se alcanza es de 0’735 mg/ml

Dada $f:(1,e)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ (ln denota la función logaritmo neperiano), determina la recta tangente a la gráfica de *f* que tiene pendiente máxima.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

La pendiente de la recta tangente es máxima en el punto de inflexión. Luego vamos a calcular los puntos de inflexión de esta función.

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

El valor $x=0$ no está en el dominio, por lo tanto, sólo sirve el valor $x=2$, es decir, el punto que nos piden es: $\left(2,\frac{1}{2}+\ln 2\right)$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $x=2$, es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

Sustituyendo los valores de $f(2)=\frac{1}{2}+\ln 2$ y $f'(2)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, tenemos:

$$y-\frac{1}{2}-\ln 2=\frac{1}{4}\cdot(x-2)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\ln 2$$

Dada la función $f:(0,2\pi)\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=sen(x)+\cos(x)$, calcula sus máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la gráfica de *f* (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\cos x-sen\,x=0\Rightarrow\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{sen\,x}{\cos x}=0\Rightarrow 1-tg\,x=0\Rightarrow tg\,x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\ ;\ x=\frac{5\pi}{4}$$

	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$
Signo $f'(x)$	+	—	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

Tiene un Máximo en $\left(\frac{\pi}{4},+\sqrt{2}\right)$ y un mínimo $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f''(x)=-sen\,x-\cos x=0\Rightarrow -\frac{sen\,x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}=0\Rightarrow -tg\,x-1=0\Rightarrow tg\,x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\ ;\ x=\frac{7\pi}{4}$$

	$\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$
Signo $f''(x)$	—	+	—
Función	Cn	Cx	Cn

La función es cóncava en el intervalo $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$ y convexa en el intervalo $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ para $cx+1\neq 0$

Determina *a, b* y *c* sabiendo que la recta $x=-1$ es una asíntota vertical a la gráfica de *f* y que $y=2x+4$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Las asíntotas verticales son los valores que anulan el denominador, luego:

$$c\cdot(-1)+1=0\Rightarrow c=1.$$

Si $x=1\Rightarrow y=2\cdot 1+4=6$. Luego la función pasa por el punto $(1,6)$, es decir:

$$f(1)=6\Rightarrow \frac{a\cdot 1+b}{1+1}=6\Rightarrow a+b=12$$

Calculamos la derivada de $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{a\cdot(x+1)-1\cdot(ax+b)}{(x+1)^2}$$

Como la pendiente de la recta tangente es 2, entonces:

$$f'(1)=2\Rightarrow \frac{a\cdot(1+1)-1\cdot(a1+b)}{(1+1)^2}=2\Rightarrow \frac{2a-a-b}{4}=2\Rightarrow a-b=8$$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} a+b=12 \\ a-b=8 \end{array}\right\}\Rightarrow a=10\ ;\ b=2$

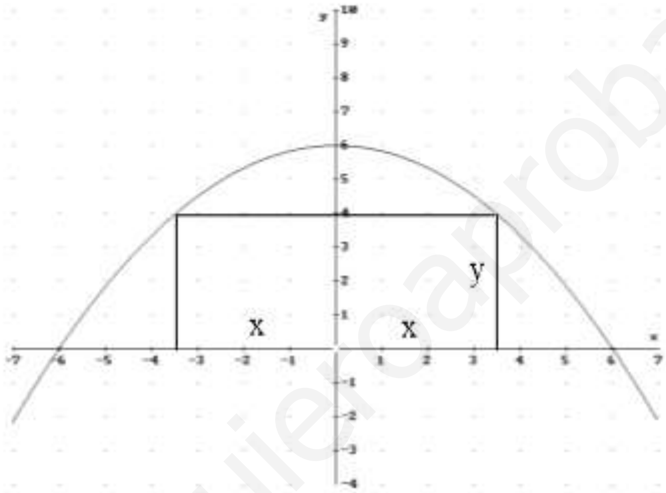
Luego, los valores son: $a=10\ ;\ b=2\ ;\ c=1$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de *f* y la recta $y=0$.

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un dibujo



a) La función que queremos que sea máxima es: $S_{\max}=2x\cdot y$

b) Relación entre las variables: $y=6-\dfrac{x^2}{6}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max}=2x\cdot(6-\frac{x^2}{6})=2x\frac{36-x^2}{6}=12x-\frac{x^3}{3}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'=12-x^2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$$

La solución válida es $+\sqrt{12}$ ya que es una longitud. Comprobamos que es máximo.

$$S''=-2x\Rightarrow S''\left(2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}<0\Rightarrow \text{ Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $base=2x=4\sqrt{3}\ u$; $altura=y=4\ u$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} sen(x)+ax+b & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula *a* y *b*
MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x=0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(sen\,x+ax+b)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)=\dfrac{0}{0}=L'Hôpital=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}\right)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow b=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \cos x+a & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Como es derivable en $x=0$, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=1+a \\ f'(0^+)=\dfrac{0}{0}=L'Hôpital=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{2(x+1)^2}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow 1+a=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$$

Luego, los valores son: $a=-\dfrac{3}{2}$ y $b=1$