EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

**PROBLEMAS RESUELTOS**
**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**
**2004**

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

**Sean los puntos A (1,2,1); B (2,3,1); C (0,5,3) y D (−1,4,3)**
**a) Prueba que los 4 puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.**
**b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo.**
**c) Calcula el área de dicho rectángulo.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

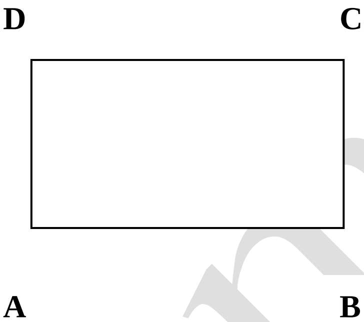
a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AD}$ tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$ ; $\overrightarrow{AC} = (-1,3,2)\ y\ \overrightarrow{AD} = (-2,2,2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Los 4 puntos están en un mismo plano.}$$

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 1 = 0$

b) Si los cuatro puntos forman un rectángulo




Los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AD}$ tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{BC}$ tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{DC}$ tienen que tener el mismo módulo $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow$ Cierto

Luego forman un rectángulo.

c) Área = $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = 4'89\ u^2$

**Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$, halla un vector unitario $\vec{w}$ que sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$ .**
**MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

Llamamos $\vec{w}=(a,b,c)$ y vamos aplicando las condiciones del problema.

1. $\vec{w}$ unitario $\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$

2. $\vec{u},\vec{v}$ $y$ $\vec{w}$ coplanarios $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a+c-2b=0$

3. $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{v}$ $\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow -a+c=0$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b^2+c^2=1 \\ a+c-2b=0 \\ -a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Luego el vector $\vec{w}$ será: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

**Considera las rectas:** $r \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

**Halla la ecuación de una recta que corte a *r* y *s* y sea perpendicular al plano *z* = 0.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (t, t, 2)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1 - s, s, 3)$.

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1 - s - t, s - t, 1)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular al plazo *z* = 0, este vector y el vector $\vec{n} = (0, 0, 1)$ tienen que ser paralelos, luego:

$$\frac{1 - s - t}{0} = \frac{s - t}{0} = \frac{1}{1} \Rightarrow s = \frac{1}{2} \; ; \; t = \frac{1}{2}$$

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$ y su vector director es el $\vec{AB} = (0, 0, 1)$

La recta tiene de ecuación: $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{0} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{0} = \dfrac{z - 2}{1}$

**Sean los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.**
**a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por *A* y por *B*.**
**b) Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos *ABCD* sabiendo que la recta determinada por los vértices *C* y *D* pasa por el origen de coordenadas.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(1,-1,4)$. La distancia será:

$$d(P,r)=\frac{\text{módulo}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{\text{módulo }(-1,-1,-5)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\ u$$

b)

$$\text{Área}=\text{Base}\cdot\text{altura}=\sqrt{18}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}\ u^2$$

**Halla la distancia entre las rectas:** $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}$

**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y vector director de cada recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \dfrac{5}{3}, 0\right) \; ; \; \vec{u} = \left(0, -\dfrac{1}{3}, 1\right)$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (2,0,0) \; ; \; \vec{v} = (-1,0,1)$$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = \left(2, -\dfrac{5}{3}, 0\right)$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r,s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\textit{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + 1 + \frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{11}} \; u$$

**Considera los puntos $P(6,-1,-10)$, $Q(0,2,2)$ y *R*, que es el punto de intersección del plano $\pi \equiv 2x+\lambda y+z-2=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=1 \end{cases}$. Determina $\lambda$, sabiendo que los puntos *P*, *Q* y *R* están alineados.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, para ello pasamos la recta a paramétricas y la sustituimos en la ecuación del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$$

$$2x+\lambda y+z-2=0 \Rightarrow -2t+\lambda+t-2=0 \Rightarrow t=\lambda-2$$

Luego el punto *R* tiene de coordenadas $R=(-\lambda+2,1,\lambda-2)$.

La ecuación de la recta que pasa por *P* y *Q* es: $\dfrac{x-6}{-6}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+10}{12}$

Y como el punto *R* tiene que cumplir esta ecuación, tenemos que:

$$\frac{-\lambda+2-6}{-6}=\frac{1+1}{3}=\frac{\lambda-2+10}{12} \Rightarrow \frac{-\lambda-4}{-6}=\frac{2}{3}=\frac{\lambda+8}{12} \Rightarrow \lambda=0$$

**Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$**

**a) Halla la ecuación de un plano perpendicular a $\pi$ y que contenga a la recta *r*.**
**b) ¿Hay algún plano paralelo a $\pi$ que contenga a la recta *r*?. En caso afirmativo determina sus ecuaciones.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - z = 2 \end{cases}$$

El haz de planos que contiene a la recta *r* es: $x - y + k(3x - z - 2) = 0 \Rightarrow (1+3k)x - y - kz - 2k = 0$

Como queremos que sea perpendicular al plano $\pi$, sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, luego:

$$(2,1,-1)\cdot(1+3k,-1,-k) = 0 \Rightarrow 2 + 6k - 1 + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{7}$$

Sustituyendo tenemos que el plano pedido es: $x - y - \frac{1}{7}(3x - z - 2) = 0 \Rightarrow 4x - 7y + z + 2 = 0$

b) Si queremos que sea paralelo, sus vectores normales tienen que ser paralelos, luego:

$$\frac{1+3k}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{-k}{-1} \Rightarrow k = -1$$

Sustituyendo tenemos que el plano pedido es: $x - y - 1(3x - z - 2) = 0 \Rightarrow -2x - y + z + 2 = 0$

**Las rectas** $r \equiv \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$

**contienen dos lados de un cuadrado.**
**a) Calcula el área del cuadrado.**
**b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Las rectas *r* y *s*, serán paralelas, luego si calculamos la distancia de un punto de la recta *r* a la recta *s* tendremos el lado del cuadrado.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A=(2,0,0)\ ;\ \vec{u}=(-1,1,0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B=(6,0,0)\ ;\ \vec{u}=(-1,1,0)$$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(4,0,0)$. La distancia será:

$$d(A,s)=\frac{\textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{\textit{módulo}\ (0,0,-4)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}\ u$$

Luego, el área del cuadrado será: $Área=l^2=(\sqrt{8})^2=8\ u^2$

b) El plano viene definido por el punto *A* y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{AB}$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 4 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix}=-4z=0 \Rightarrow z=0$$

**Calcula el área del triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$ y $C$, siendo $C$ la proyección ortogonal del punto $(1,1,1)$ sobre el plano $x+y+z=1$.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la proyección del punto $(1,1,1)$ sobre el plano.

Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *A* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

Vector normal del plano = vector director de la recta = (1,1,1)

La ecuación paramétrica de la recta será:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*C*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$1 + t + 1 + t + 1 + t = 1\ ;\ 3t = -2;\ t = -\frac{2}{3}$$

luego las coordenadas del punto *C* son: $x = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3};\ y = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3};\ z = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Calculamos los vectores $\vec{AB} = (0,1,-1)$ y $\vec{AC} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ y aplicamos la fórmula del área del triángulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\,|\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ u^2$$

**Considera el punto $A(0,1,-1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-z=-4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-2y-z=2$. Halla la ecuación de la recta que pasa por *A*, es paralela a $\pi$ y corta a *r*.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

El vector $\vec{AB}=\left(\frac{-4+t}{2},\frac{-8+3t}{4},t+1\right)$ y el vector normal del plano tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar tiene que valer cero.

$$\left(\frac{-4+t}{2},\frac{-8+3t}{4},t+1\right)\cdot(1,-2,-1)=0 \Rightarrow \frac{-4+t}{2}+\frac{8-3t}{2}-t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$\vec{AB}=\left(\frac{-4+\frac{1}{2}}{2},\frac{-8+3\frac{1}{2}}{4},\frac{1}{2}+1\right)=\left(-\frac{7}{4},-\frac{13}{8},\frac{3}{2}\right)=(14,13,-12)$$

Luego, la recta pedida es: $\frac{x}{14}=\frac{y-1}{13}=\frac{z+1}{-12}$

**Se sabe que el triángulo *ABC* es rectángulo en el vértice *C*, que pertenece a la recta intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$, y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Halla *C* y el área del triángulo *ABC*.**
**MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

$$\left.\begin{array}{r} y+z = \ \ 1 \\ y-3z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ el punto } C \text{ tiene de coordenadas } C(t,0,1) \ .$$

Como los vectores $\vec{CA}=(2-t,0,0)$ y $\vec{CB}=(-t,-3,-1)$ tienen que ser perpendiculares, tenemos:

$$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=0 \Rightarrow -2t+t^2=0 \Rightarrow t=0 \ ; \ t=2$$

Luego, el vértice *C* es: $C(0,0,1)$ , no puede valer *t* = 2, ya que obtenemos el punto *A*.

$$Área=\frac{1}{2}\left|\vec{CA}\right|\cdot\left|\vec{CB}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{10}\ u^2$$

EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

**Halla la perpendicular común a las rectas:** $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1 \end{cases}$

**MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (1, 1, \alpha)$ y cualquier punto de la recta *s* tendrá de coordenadas $B = (\beta, \beta - 1, -1)$.

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (\beta - 1, \beta - 2, -1 - \alpha)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -1 - \alpha = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \beta - 1 + \beta - 2 = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $\alpha = -1$ y $\beta = \frac{3}{2}$.

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto $A = (1, 1, -1)$ y su vector director es el $\vec{AB} = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) = (1, -1, 0)$

La perpendicular común tiene de ecuación: $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 1}{0}$