

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el punto $P(2,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r .

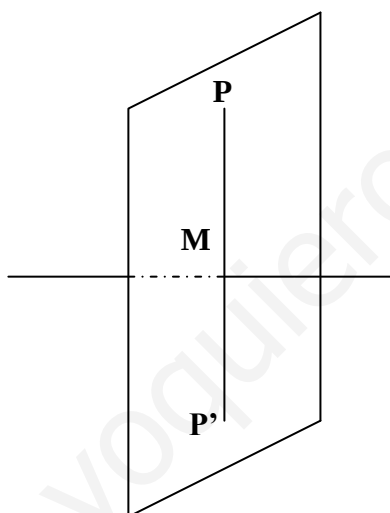
b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación del haz de planos que contiene a la recta r es: $x+2y-6+k(z-2)=0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $P(2,0,1)$, luego: $2+2\cdot 0-6+k(1-2)=0 \Rightarrow k=-4$ por lo tanto, el plano pedido tiene de ecuación: $x+2y-6-4(z-2)=0 \Rightarrow x+2y-4z+2=0$

b) El punto P' simétrico del punto P respecto de la recta r , está situado en un plano que pasando por el punto P es perpendicular a r y además la distancia que hay desde el punto P a la recta r es la misma que la que hay desde el punto P' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto P es perpendicular a r . Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(-2,1,0)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $-2x+y+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(2,0,1)$: $-2\cdot 2+0+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow -2x+y+4=0$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $-2(6-2t)+t+4=0 \Rightarrow t=\frac{8}{5}$

luego las coordenadas del punto M son: $x=6-2\cdot \frac{8}{5}=\frac{14}{5}$; $y=\frac{8}{5}$; $z=2$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que: $\frac{2+a}{2}=\frac{14}{5}$; $a=\frac{18}{5}$; $\frac{0+b}{2}=\frac{8}{5}$; $b=\frac{16}{5}$; $\frac{1+c}{2}=2$; $c=3$

Luego el simétrico es: $P'=\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3\right)$

Sean los vectores: $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -1)$ y $\vec{v}_3 = (2, 3, -1)$.

a) ¿Son los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ linealmente dependientes?

b) ¿Para qué valores de a el vector $(4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$?

c) Calcula un vector unitario y perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente dependientes si $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - 0 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow \text{Dependientes}$$

b) Dado que los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son dependientes, para que el vector $\vec{u} = (4, a+3, -2)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, basta que se pueda expresar como combinación lineal de dos de ellos, es decir, que $\det(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - 0 + 4 + 0 = 0 \Rightarrow \text{Para cualquier valor de } a \text{ el determinante vale cero,}$$

luego el vector $\vec{u}$ depende linealmente de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ y se puede expresar como combinación lineal de ellos.

c) Para calcular un vector perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, hacemos su producto vectorial.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} - 2\vec{k} + 0\vec{j} - 0\vec{i} = (-1, 0, -2)$$

Como además queremos que sea unitario, bastará con dividir dicho vector por su módulo

$$\text{módulo}(-1, 0, -2) = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Luego el vector unitario y perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ será $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ó $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

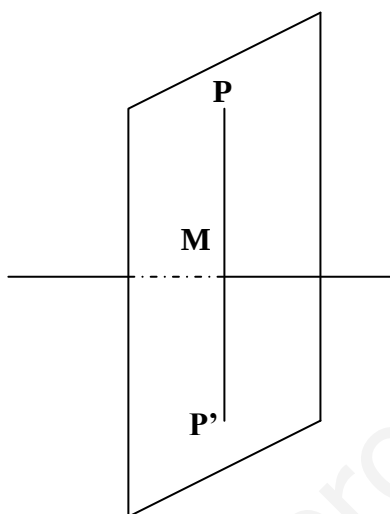
Sea el punto $P(1,0,-3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r .

b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Escribimos la ecuación de la recta r en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

Como el plano es perpendicular a la recta, su vector normal es el vector director de la recta, luego su ecuación será: $\pi \equiv -x - 2y + z + D = 0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto P , luego: $-1 - 2 \cdot 0 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 4$. Por lo tanto el plano pedido es: $\pi \equiv -x - 2y + z + 4 = 0$

b) Calculamos las coordenadas del punto M , que es el punto de corte de la recta con el plano, para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$-(-t) - 2(-1 - 2t) + t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1$$

luego, las coordenadas del punto M son: $x = 1; y = 1; z = -1$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{2} &= 1; a = 1 \\ \frac{0+b}{2} &= 1; b = 2 \\ \frac{-3+c}{2} &= -1; c = 1 \end{aligned}$$

Luego, $P' = (1, 2, 1)$

Se sabe que los puntos $A(m, 0, 1)$; $B(0, 1, 2)$; $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ están en un mismo plano.

a) Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.

b) ¿Están los puntos B , C y D alineados?

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por $B = (0, 1, 2)$; $\vec{BC} = (1, 1, 1)$; $\vec{BD} = (7, 1, -1)$, luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Como el punto A pertenece a dicho plano, debe verificar su ecuación.

$$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

b) Los puntos B , C y D , no están alineados pues forman un plano.

Se sabe que las rectas: $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} ax + 6y + 6 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ son paralelas.

a) Calcula a .

b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como las rectas r y s son paralelas, sus vectores directores son paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales. Vamos a calcular los vectores directores.

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (2, -1, 1)$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 2a\vec{j} - 6\vec{k} = (-12, 2a, -6)$$

Como sus componentes son proporcionales: $\frac{2}{-12} = \frac{-1}{2a} = \frac{1}{-6} \Rightarrow a = 3$

b) Como las rectas son paralelas, el plano que las contiene vendrá determinado por el punto A de la recta r , el vector director de la recta r y el vector $\vec{AB}$, siendo B un punto de la recta s .

El punto A puede ser $(2, 0, -1)$, el punto B puede ser $(-2, 0, 0)$, con lo cual el vector $\vec{AB}$ será el $(-4, 0, 1)$. Por lo tanto, la ecuación del plano es:

$$\pi = \begin{vmatrix} x-2 & 2 & -4 \\ y-0 & -1 & 0 \\ z+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + 6y + 4z + 2 = 0$$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = y-1 = \frac{z}{3}$

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r .

b) Calcula la distancia de la recta r al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=x \\ y=1-x \\ z=2-x \end{cases}$

La recta r , viene definida por el punto $A=(0,1,2)$ y el vector director $\vec{u}=(1,1,-1)$. La recta s , viene definida por el punto $B=(0,1,0)$ y el vector director $\vec{v}=(2,1,3)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego su ecuación será:.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 2 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4x-5y-z+5=0$$

b) Como la recta y el plano son paralelos, basta con calcular la distancia del punto A al plano

$$d(A, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{42}} = 1'23u$$

Considera el punto $A(0, -3, 1)$, el plano $\pi \equiv 2x - 2y + 3z = 0$ y la recta $r \equiv x + 3 = y = \frac{z-3}{2}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r .

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por A , es paralela a π y corta a r .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a implícitas $r \equiv x + 3 = y = \frac{z-3}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 9 = 0 \end{cases}$

La ecuación del haz de planos que contiene a la recta r es: $x - y + 3 + k(2x - z + 9) = 0$. De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $A(0, -3, 1)$, luego:

$$0 + 3 + 3 + k(0 - 1 + 9) = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

por lo tanto, sustituyendo nos queda que el plano pedido tiene de ecuación: $2x + 4y - 3z + 15 = 0$

b) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv x + 3 = y = \frac{z-3}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Cualquier punto B de la recta r , tendrá de coordenadas $B(-3+t, t, 3+2t)$. El vector director de la recta que buscamos será: $\overrightarrow{AB} = (-3+t, t+3, 2+2t)$.

Como la recta tiene que ser paralela al plano π , eso quiere decir que el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (2, -2, 3)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que valer 0.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (-3+t, t+3, 2+2t) \cdot (2, -2, 3) = -6 + 2t - 2t - 6 + 6 + 6t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Sustituyendo, nos queda que $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 4)$ y la recta que nos piden es: $\frac{x}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{4}$

Se sabe que las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = b+t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 6x + 2z = 2 \end{cases}$ están contenidas en un mismo plano.

a) Calcula b .

b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

b) Vamos a calcular primero el apartado b, para ello calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1, -1, b) \\ \vec{u} = (1, -1, 1) \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} B = (0, -2, 1) \\ \vec{v} = (1, -2, -3) \end{cases}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 1 \\ y+2 & -1 & -2 \\ z-1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5x + 4y - z + 9 = 0$$

a) Como la recta r está contenida en el plano, el punto A es de dicho plano y, por lo tanto, debe verificar su ecuación.

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - b + 9 = 0 \Rightarrow b = 10$$

Calcula la distancia entre las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (6, 1, 5) \\ \vec{u} = (1, -2, -7) \end{cases} ; \quad s \equiv \begin{cases} B = (1, 1, 0) \\ \vec{v} = (0, 0, 7) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{70}{\sqrt{245}} = 4'47u$$

módulo

Sean $A(-3, 4, 0)$; $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo.

a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

b) Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el área del triángulo ABC .

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto $A = (-3, 4, 0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (6, 2, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 1)$.
Luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = x - 2z + 3 = 0$$

b) La recta viene definida por el punto $(0, 0, 0)$ y su vector director será el vector normal del plano
 $\vec{u} = (1, 0, -2)$. Luego su ecuación será: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$

c) Aplicamos la fórmula del área del triángulo $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 0 + 256} = \frac{\sqrt{320}}{2} u^2$$

Considera un plano $\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \frac{z - 2}{2}$

- a) Halla m para que r y π sean paralelos.
 b) Halla m para que r y π sean perpendiculares.
 c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π ?

MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es $\vec{n} = (1, 1, m)$ y el vector director de la recta es $\vec{u} = (1, 1, 2)$. Si el plano y la recta son paralelos, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, luego, su producto escalar vale cero

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 1 + 2m = 0 \Rightarrow m = -1$$

b) Si el plano y la recta son perpendiculares, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son paralelos, luego, sus componentes tienen que ser proporcionales

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 2$$

c) Si la recta está contenida en el plano, el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, luego, $m = -1$, y el plano sería $x + y - z = 3$. Pero, como la recta está contenida en el plano, todos los puntos de la recta deben pertenecer a dicho plano. Un punto de la recta es el $A = (0, 1, 2)$, que debe pertenecer al plano

$$0 + 1 - 2 \neq 3 \Rightarrow \text{No pertenece al plano}$$

por lo tanto, no hay ningún valor de m para el cual la recta esté contenida en el plano.

Otra forma:

Con las dos ecuaciones de la recta y el plano, podemos formar un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, y para que la recta esté contenida en el plano, se tiene que cumplir que $R(A) = R(M) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + mz = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x - z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow R(M) = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{La recta no puede estar contenida en el plano}$$

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$.

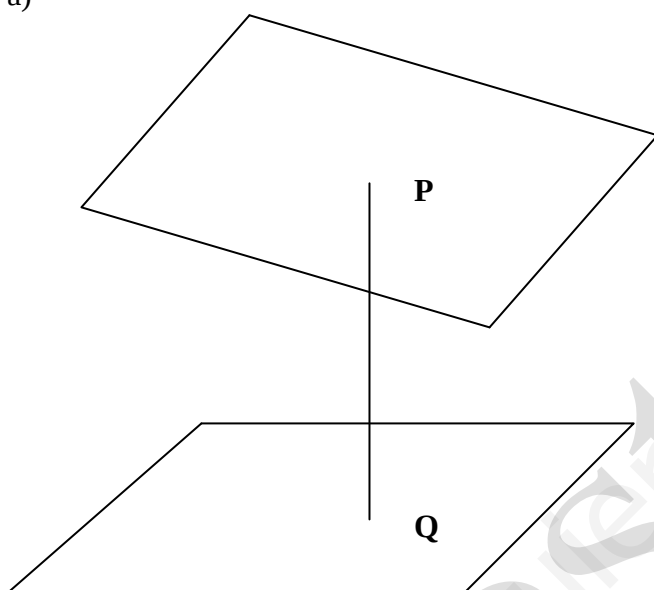
a) Calcula las coordenadas del punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1, 0, -3)$.

b) Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π_2

MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano π_2 , $\vec{n} = (1, 2, 1)$ y el punto $Q = (1, 0, -3)$, calculamos la ecuación de la recta perpendicular a π_2 y que pasa por Q .

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

El punto P será el punto de intersección de r con π_1 , luego:

$$2(1+t) + (2t) - (-3+t) + 5 = 0 \Rightarrow t = -\frac{10}{3}$$

$$P = (1+t, 2t, -3+t) = \left(1 - \frac{10}{3}, 2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right), -3 - \frac{10}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}, -\frac{19}{3}\right)$$

b) El punto Q , es el punto medio del segmento PP' , siendo P' el simétrico del punto P , luego, si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que:

$$\frac{-\frac{7}{3} + a}{2} = 1; a = \frac{13}{3}; \quad \frac{-\frac{20}{3} + b}{2} = 0; b = \frac{20}{3}; \quad \frac{-\frac{19}{3} + c}{2} = -3; c = \frac{1}{3}$$

El punto pedido es $P' = \left(\frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{1}{3}\right)$