EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2008

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Dada la recta *r* definida por: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*.

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a implícitas: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y-5=0\\x-2z+3=0\end{cases}$

Calculamos la ecuación del haz de planos:

$$3x-2y-5+k(x-2z+3)=0\Rightarrow(3+k)x-2y-2kz-5+3k=0$$

Como queremos que pase por el origen, tenemos:

$$(3+k)\cdot 0-2\cdot 0-2k\cdot 0-5+3k=0\Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

Luego, el plano que nos piden es:

$$3x-2y-5+\frac{5}{3}(x-2z+3)=0\Rightarrow 7x-3y-5z=0$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego, su ecuación será:

$$2x+3y+z+D=0$$

Como queremos que pase por el origen:

$$2\cdot 0+3\cdot 0+0+D=0\Rightarrow D=0$$

Luego, el plano que nos piden es: $2x+3y+z=0$

Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.
MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El punto C como está en el eje OX, tendrá de coordenadas $C(a,0,0)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,-1,0)$ y $\vec{AC}=(a-2,-1,-1)$ y calculamos su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1,-2,a)$$

$$S=\frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\,| = \Rightarrow 2=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+a^2} \Rightarrow a=\pm\sqrt{11}$$

Luego, el punto C puede ser $C(\sqrt{11},0,0)$ ó $C(-\sqrt{11},0,0)$

Los puntos $A=(-2,3,1)$, $B=(2,-1,3)$ y $C=(0,1,-2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.
a) Halla las coordenadas del vértice *D*.
b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por *B* y es paralela a la diagonal *AC*.
c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si *ABCD* son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ son iguales:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}=(4,-4,2)\\ \vec{DC}=(-x,1-y,-2-z)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{AB}=\vec{DC}\Rightarrow D=(-4,5,-4)$$

b) La recta pasa por el punto $B=(2,-1,3)$ y como vector director el $\vec{AC}=(2,-2,-3)$. Su ecuación continua es

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-3}$$

c) El plano viene definido por el punto $B=(2,-1,3)$ y los vectores $\vec{BA}=(-4,4,-2)$ y $\vec{BC}=(-2,2,-5)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -4 & -2 \\ y+1 & 4 & 2 \\ z-3 & -2 & -5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow x+y-1=0$$

Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=-m \end{cases}$ y el plano π definido por $x+my-z=1$
a) ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?.
b) ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?.
c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m=0$?.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-m, 2-m, -3)$$

Si la recta es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u}=(-1-m,2-m,-3)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1,m,-1)$ debe valer cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow -1-m+2m-m^2+3=0 \Rightarrow -m^2+m+2=0 \Rightarrow m=-1\ ;\ m=2$$

b) Formamos el sistema con las tres ecuaciones. Para que la recta esté contenida en el plano el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe valer 2.

$$\begin{cases} 2x+y-mz= & 2 \\ x-y-z= & -m \\ x+my-z= & 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2+m+2=0 \Rightarrow m=-1\ ;\ m=2 \Rightarrow Rango(A)=2$$

Si $m=-1 \Rightarrow Rango(M)=2 \Rightarrow$ Recta contenida en el plano

Si $m=2 \Rightarrow Rango(M)=3 \Rightarrow$ La recta no está contenida en el plano

c) Si $m=0 \Rightarrow Rango(A)=3 \Rightarrow$ La recta es secante con el plano.

Considera la recta r definida por $\left\{\begin{array}{r} x=0 \\ 3y+z=3 \end{array}\right.$ y la recta s definida por $\left\{\begin{array}{r} 2x-z=3 \\ y=0 \end{array}\right.$
a) Estudia la posición relativa de r y s.
b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos el sistema con las cuatro ecuaciones: $\left\{\begin{array}{r} x=0 \\ 3y+z=3 \\ 2x-z=3 \\ y=0 \end{array}\right.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow Rango(A)=3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow Rango(M)=4$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) Pasamos las rectas a paramétricas.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{r} x=0 \\ 3y+z=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=y \\ z=3-3y \end{array}\right. \Rightarrow A=(0,0,3)\ ;\ \vec{u}=(0,1,-3)$$

$$s \equiv \left\{\begin{array}{r} 2x-z=3 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=x \\ y=0 \\ z=-3+2x \end{array}\right. \Rightarrow B=(0,0,-3)\ ;\ \vec{v}=(1,0,2)$$

El plano que nos piden viene definido por $B=(0,0,-3)$; $\vec{v}=(1,0,2)$; $\vec{u}=(0,1,-3)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z+3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2x+3y+z+3=0$$

Sea la recta *r* definida por $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ **y sean los planos** π_1 **de ecuación** $x+y+z=0$**, y** π_2**, de ecuación** $y+z=0$**. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano** π_1**, que es paralela al plano** π_2 **y que corta a la recta *r*.**

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como la recta pedida está contenida en el plano π_1 y es paralela al plano π_2, su vector director tiene que ser perpendicular a los vectores normales de dichos planos, luego:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,1)$$

Cualquier punto de la recta *r* tiene de coordenadas $(1,1,a)$, por lo tanto, la recta pedida tendrá de ecuación: $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1-t \\ z=a+t \end{array}\right.$ y como está contenida en el plano π_1 debe verificar su ecuación. Luego:

$$x+y+z=0 \Rightarrow 1+1-t+a+t=0 \Rightarrow a=-2$$

La recta que nos piden tiene de ecuación: $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1-t \\ z=-2+t \end{array}\right.$

Se sabe que los planos de ecuaciones: $x+2y+bz=1$; $2x+y+bz=0$; $3x+3y-2z=1$ se cortan en una recta *r*.
a) Calcula el valor de *b*.
b) Halla unas ecuaciones paramétricas de *r*.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los tres planos se corten en una recta, el sistema formado por las tres ecuaciones debe tener infinitas soluciones, es decir, Rango (A) = Rango (M) =2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6b+6=0 \Rightarrow b=-1$$

b) Para calcular las ecuaciones de la recta tomamos las dos últimas ecuaciones de sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ 3x+3y-2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y= z \\ 3x+3y=1+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{z}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}+\dfrac{z}{3} \\ z=z \end{cases}$$

Dados los puntos $A=(2,1,-1)$ y $B=(-2,3,1)$ y la recta r definida por $\left\{\begin{array}{l} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{array}\right.$ halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas. $\left\{\begin{array}{l} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-5+2t}{3} \\ y=\dfrac{-2-t}{3} \\ z=t \end{array}\right.$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $C=\left(\dfrac{-5+2t}{3},\dfrac{-2-t}{3},t\right)$. Para que equidiste de A y B, el módulo de los vectores $\vec{AC}=\left(\dfrac{-11+2t}{3},\dfrac{-5-t}{3},t+1\right)$ y $\vec{BC}=\left(\dfrac{1+2t}{3},\dfrac{-11-t}{3},t-1\right)$ deben ser iguales, luego:

$$\sqrt{\left(\frac{-11+2t}{3}\right)^2+\left(\frac{-5-t}{3}\right)^2+(t+1)^2}=\sqrt{\left(\frac{1+2t}{3}\right)^2+\left(\frac{-11-t}{3}\right)^2+(t-1)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{121+4t^2-44t}{9}+\frac{25+t^2+10t}{9}+t^2+1+2t=\frac{1+4t^2+4t}{9}+\frac{121+t^2+44t}{9}+t^2+1-2t\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -24t=-24\Rightarrow t=1$$

Luego, el punto que nos piden es: $C=\left(\dfrac{-5+2t}{3},\dfrac{-2-t}{3},t\right)=\left(\dfrac{-5+2\cdot 1}{3},\dfrac{-2-1}{3},1\right)=(-1,-1,1)$

Otra forma: Calculamos la ecuación del plano mediador, es decir, el plano perpendicular a la recta que pasa por A y B por el punto medio del segmento AB.

El vector normal del plano es el vector $\vec{AB}=(-4,2,2)$, luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta que pasa por A y B es: $-4x+2y+2z+D=0$
como queremos el que pasa por el punto medio del segmento AB, $(0,2,0)$, tenemos que:

$$-4\cdot 0+2\cdot 2+2\cdot 0+D=0\Rightarrow D=-4\Rightarrow -4x+2y+2x-4=0$$

El punto que nos piden, es el punto de corte de la recta r con el plano mediador, luego, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta r y el plano, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \\ -4x+2y+2z-4=0 \end{array}\right\}\Rightarrow C=(-1,-1,1)$$

Se considera la recta r definida por $mx = y = z + 2$ $(m \neq 0)$, y la recta s definida por $\dfrac{x-4}{4} = y - 1 = \dfrac{z}{2}$

a) Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.

b) Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de las rectas: $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{m}, 1, 1\right)$ y $\vec{v} = (4,1,2)$. Si las rectas son perpendiculares el producto escalar de los dos vectores debe valer 0, luego:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}, 1, 1\right) \cdot (4,1,2) = 0 \Rightarrow \frac{4}{m} + 1 + 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

b) Si las rectas son paralelas, sus vectores directores deben tener las componentes proporcionales, luego:

$$\frac{\frac{1}{m}}{4} = \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Imposible}$$

Considera los puntos $A=(2,0,1)$, $B=(-1,1,2)$, $C=(2,2,1)$ y $D=(3,1,0)$.
a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos *B*,*C* y *D*.
b) Halla el punto simétrico de *A* respecto del plano π.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano π, viene definido por le punto $B=(-1,1,2)$ y los vectores $\overrightarrow{BC}=(3,1,-1)$ y $\overrightarrow{BD}=(4,0,-2)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-y+2z-2=0$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *A* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1,-1,2)$

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=2+t \\ y=-t \\ z=1+2t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2+t+t+2+4t-2=0 \Rightarrow 6t=-2 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$$

luego las coordenadas del punto *M* son: $\left(2-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *A A'*, si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto *A'*, se debe verificar que:

$$\frac{2+a}{2}=\frac{5}{3};a=\frac{4}{3};\ \frac{0+b}{2}=\frac{1}{3};b=\frac{2}{3};\ \frac{1+c}{2}=\frac{1}{3};c=-\frac{1}{3} \Rightarrow A'=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Sea la recta *s* dada por $\left\{\begin{array}{l} x-z=-1 \\ 2y+z=3 \end{array}\right.$

a) Halla la ecuación del plano π_1 **que es paralelo a la recta *s* y que contiene a la recta *r*, dada por** $x-1=-y+2=z-3$

b) Estudia la posición relativa de la recta *s* y el plano π_2**, de ecuación** $x+y=3$**, y deduce la distancia entre ambos.**

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *s* a paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x-z=-1 \\ 2y+z=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+z \\ y=\dfrac{3-z}{2} \\ z=z \end{array}\right. \Rightarrow A=(-1,\frac{3}{2},0)\ ;\ \vec{u}=(1,-\frac{1}{2},1)$$

Pasamos la recta *r* a continua

$$x-1=-y+2=z-3 \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1} \Rightarrow B=(1,2,3)\ ;\ \vec{v}=(1,-1,1)$$

El plano que nos piden viene definido por: $B=(1,2,3)\ ;\ \vec{v}=(1,-1,1)\ ;\ \vec{u}=(1,-\frac{1}{2},1)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ z-3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-z+2=0$$

b) Formamos el sistema con las tres ecuaciones.

$\left\{\begin{array}{l} x-z=-1 \\ 2y+z=3 \\ x+y=3 \end{array}\right. \Rightarrow Rango\ A=Rango\ M=3 \Rightarrow$ La recta y el plano son secantes, luego, la distancia es cero.

Dados los puntos $A=(1,1,0)$, $B=(1,1,2)$ y $C=(1,-1,1)$.
a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.
b) Halla la ecuación del plano que contiene el punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.
MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los puntos *A*, *B* y *C* no estén alineados los vectores $\vec{AB}=(0,0,2)$ y $\vec{AC}=(0,-2,1)$ no deben ser proporcionales. Vemos que efectivamente no son proporcionales, luego, los tres puntos no están alineados.

Calculamos el producto vectorial de los vectores $\vec{AB}=(0,0,2)$ y $\vec{AC}=(0,-2,1)$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-4,0,0)$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2\ u^2$$

b) El vector normal del plano que nos piden es $\vec{BC}=(0,-2,-1)$ y pasa por el punto *A*, luego:

$$-2y-z+D=0\Rightarrow -2\cdot 1-0+D=0\Rightarrow D=2\Rightarrow -2y-z+2=0$$